Astana Physics Battles 2023

Условия и решения

Юниорская лига

Содержание

Первый раунд

Задание 1

Автор: Кайроллаев Е.
Почему термосы не являются идеальными изоляторами?

Решение

За каждый пункт по 4 балла:

- Невозможно создать идеальный вакуум, поэтому через газ будет идти небольшое количество конвекции;
- Все нагретые тела излучают инфракрасные лучи, и они переносят часть энергии из содержимого термоса наружу;
- Теплопроводность крепления внутренней части термоса к внешней.

Задание 2

Автор: Кайроллаев Е.
Посмотрев на светящуюся точку в небе, очень просто понять чем она является: звездой, планетой или самолётом. Качественно объясните разницу между наблюдением этих объектов невооруженным глазом.

Решение

За каждый пункт по 4 балла:

- Звезды видимы в качестве быстро мерцающих точек. Из-за действия воздушных масс, в разных частях атмосферы возникают колебания плотности, изменяя угол преломления лучей;
- Планеты, в отличие от звёзд, не мерцают;
- Движение самолёта намного заметнее, чем движение звёзд и планет. За счёт этого их можно и отличить.

Задание 3

Автор: Кайроллаев Е.
Те, кто когда-либо сидели у костра, знают, что дым всегда дует в их сторону, причиняя большие неудобства. Объясните природу этого явления.

Решение

Рассмотрим отдельно стоящий костёр:

- Нагреваемый им воздух будет подниматься наверх (3 балла);
- На смену ему будет приходить холодный поток воздуха сбоку (4 балла);
- Если сесть у костра, вы будете блокировать поток холодного воздуха со своей стороны, создавая новый путь для горячего воздуха от костра (5 баллов).

Задание 4

Автор: Еркебаев А.
В закрытой тонкостенной металлической канистре находится керосин. Предложите способ, позволяющий определить примерный уровень керосина в канистре, не пользуясь никакими измерительными приборами и не опрокидывая канистру.

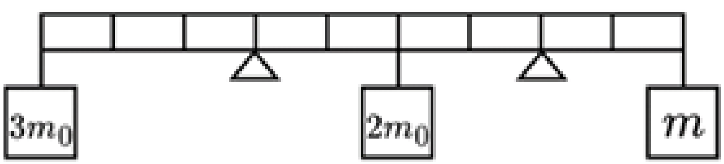
Решение

1. Нужно охладить канистру, положив её в холодильник или любым другим способом, а затем вытащить и подождать; (3 балла)
2. Сконденсированная вода образуется на поверхности канистры (4 балла);
3. Конденсат будет снизу до верхнего уровня керосина (из-за более быстрой теплопередачи, и вследствие охлаждения металла в этой области) (5 баллов; без объяснения не принимать);

Альтернативное решение 4 балла:
Потрогать канистру рукой, часть с керосином будет ощущаться холоднее. Данный метод имеет низкую точность и поэтому получает меньше баллов.

Задание 5

Автор: Еркебаев А.
Три груза массами m, $2m_0$ и $3m_0$ подвешены на лёгком рычаге, покоящемся на двух опорах так, как показано на рисунке. Одно деление на рычаге имеет длину a. Каков диапазон m/m_0, при котором система в равновесии?



Решение

Баланс моментов сил относительно левого и правого опор дают соответственно:

$$3m_0 \cdot 3a \leq 2m_0 \cdot 2a + m \cdot 6a, \qquad (2.5 \text{ балла})$$
$$3m_0 \cdot 7a \leq 2m_0 \cdot 2a \geq m \cdot 2a. \qquad (2.5 \text{ балла})$$

Следовательно,

$$\frac{5}{6} \leq \frac{m}{m_0} \leq \frac{25}{2}. \qquad (3.5 \text{ за каждую сторону неравенства})$$

Задание 6

Автор: Еркебаев А.
Чашу с водой расположили на электронных весах, на которых затем нажали кнопку «тара», так что показания весов стали нулевыми. Затем камень, подвешенный к динамометру, медленно опустили в воду, и после такого, показания весов стали равными 5 Н. Если показания динамометра уменьшились вдвое после погружения, чему равна масса камня? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение

Изначально, натяжение пружины было равно весу камня, $T = mg$ (2 балла). Когда камень погрузили в воду, Архимедова сила начала действовать на камень, так что

$$0.5T + \rho g V = mg, \qquad (3 \text{ балла})$$

где V – объём камня. Что означает 5 Н в таком случае? Согласно третьему закону Ньютона, если вода действует на камень с силой $\rho g V$, то сила давления на дно чаши тоже увеличивается на $\rho g V$ (2 балла). В таком случае,

$$\frac{mg}{2} = 5 \text{ Н}, \qquad (2.5 \text{ балла})$$
$$m = 1 \text{ кг}. \qquad (2.5 \text{ балла})$$

Задание 7

Автор: Еркебаев А.
Алюминиевый шарик был заморожен во льду массой $m_л = 170$ г и брошен в тару с холодной водой при $0°C$. При какой максимальной массе шарик (вмороженный во льду) может всплыть на поверхность воды? Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho_а = 2700$ кг/м^3

Решение

Сила Архимеда на лёд должна быть равна их силе тяжести, а также весь объем равен суммарному объему льда и мячика:

$$\rho g V = (m + m_л)g, \qquad (3 \text{ балла})$$
$$V = \frac{m}{\rho_а} + \frac{m_л}{\rho_л}. \qquad (2 \text{ балла})$$

Решая данную систему уравнений, получаем:

$$m = m_i \cdot \frac{\rho_в/\rho_л - 1}{1 - \rho_в/\rho_а} = 30 \text{ г.}$$

4 балла формула и 2 балла численный ответ.

Задание 8

Автор: Еркебаев А.

Дисплей автомобиля показывает потребление топлива в литрах на каждые 100 километров. Автомобиль начал ехать по горизонтальной дороге, и когда его скорость стала равна $v_1 = 80$ км/ч, водитель включил круиз-контроль, таким образом поддерживая скорость постоянной. В этом случае потребление топлива стало равным $f_1 = \frac{8 \text{ л}}{100 \text{ км}}$. Полагая, что КПД автомобиля неизменен, а сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости автомобиля, рассчитайте потребление топлива f_2 при скорости $v_2 = 120$ км/ч.

Решение

Работа сил против сил сопротивления F, уходящая на поддержание постоянного движения автомобиля при перемещении s, равна $A = Fs$, и эта работа достигается за счёт сжигания топлива – в этом случае можно написать $A = kfs$ (5 баллов), где k есть коэффициент пропорциональности. Учитывая, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости, можно получить

$$f_2 = f_1 \frac{v_2^2}{v_1^2}, \qquad (5 \text{ баллов})$$
$$f_2 = 18 \ \frac{\text{л}}{\text{км}}. \qquad (2 \text{ балла})$$

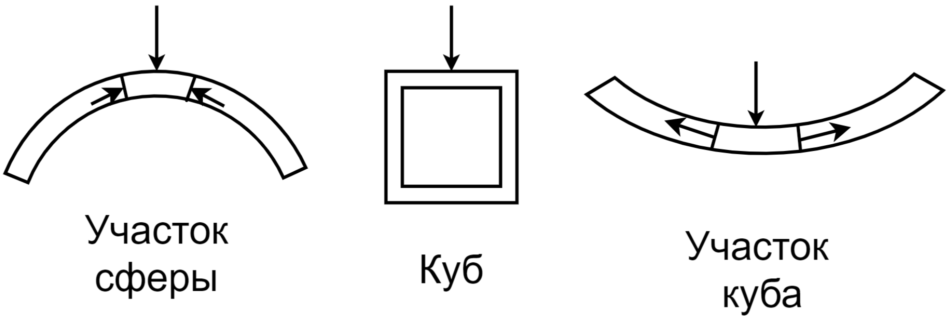
Второй раунд

Задание 1

Автор: Кайроллаев Е.
Используя знания статики, объясните, почему грань полого куба погнуть проще, чем грань сферы, при условии, что они сделаны из одного материала одной толщины и диаметр сферы равен диаметру куба.

Решение

Как видно на рисунке, у сферы изначально есть компоненты силы реакции, действующие параллельно к поверхности, в то время, как у куба они появляются только после деформации. (12 баллов)



Задание 2

Автор: Кайроллаев Е.
Если светить лазером в чистом воздухе, то луч лазера в воздухе не будет виден. Однако, если светить лазером в тумане, или в воздухе с любыми другими взвешенными частицами, то можно будеть хорошо заметить траекторию луча. Чем вызвано такое явление?

Решение

Каждый пункт 3 балла:

- Чтобы увидеть какой-либо объект, нужно чтобы свет, отразившись от него, попал в глаз.
- Луч лазера является тонким монохроматическим пучком света (т.е. длины волн излучаемых фотонов одинаковы); соответственно, чтобы увидеть его, нужно, чтобы он отразился от чего-либо, и попал нам в глаза;
- Человеческий глаз не способен увидеть свет, отражённый от атомов воздуха

- Капельки воздуха в тумане (или любые другие частицы схожего радиуса), напротив, достаточно большие, чтобы свет от них начал рассеиваться.

Задание 3

Автор: Кайроллаев Е.

Загадочная красная точка движется вдоль стены со скоростью $v_0 = 3$ м/с. На расстоянии $L = 1.2$ м от стены сидит кот Томас Джеймс Джаспер Патрик и смотрит на эту загадочную точку. Когда от точки до кошки остаётся $x = 1.3$ м, он начинает бежать перпендикулярно к стене с постоянной скоростью. Какова скорость Тома, если он "споймал" точку?

Решение

Красная точка проходит $s = \sqrt{x^2 - L^2}$ (2 балла) за время

$$t = \frac{s}{v_0}. \qquad \text{(2 балла)}$$

В то же время кошка прибегает к стене за время

$$L = \frac{L}{v_k}. \qquad \text{(2 балла)}$$

Выражая времена из этих уравнений и приравнивая их, получаем:

$$\frac{\sqrt{x^2 - L^2}}{v_0} = \frac{L}{v_k}. \qquad \text{(2 балла)}$$

Решая это уравнение, находим скорость кошки (2 балла за уравнение и 2 балла за численный ответ):

$$v_k = \frac{L v_0}{\sqrt{x^2 - L^2}} = 7.2 \text{ м/с}$$

Задание 4

Автор: Горшунов Н.

Бауыржан редко на уроках слушал учителя; обычно его занимали глубокие философские вопросы. Например, он размышлял: «Можно ли игрушечным пистолетиком вскипятить воду? Ведь в каждом выстреле таится энергия... Допустим, у нас есть большой теплоизолирующий сосуд, в который мы нальём стакан воды. А затем начнём в воду стрелять обычными пластмассовыми пульками. Сколько выстрелов потребуется, чтобы вода начала кипеть? Получится ли вообще её вскипятить?»

1. Оцените минимальную скорость v, которую должны иметь пульки перед попаданием в воду, чтобы вскипятить её стало возможным.

2. Оцените количество выстрелов для пулек со скоростью $2v$, необходимых, чтобы вода закипела.

Решение

Часть 1
При попадании в воду кинетическая энергия каждой пульки полностью перейдёт в тепловую. Чтобы нагреть воду до 100 градусов пульками было возможно, необходимо, чтобы энергии пульки было больше, чем необходимо для нагрева только её одной до 100 градусов (иначе пульки в принципе не смогут нагреться до 100). То есть необходимо, чтобы:

$$\frac{m_{\text{пульки}} v^2}{2} \geq c_{\text{пульки}} m_{\text{пульки}} (t_{100} - t_{20})$$
$$v \geq \sqrt{2 c_{\text{пульки}} (t_{100} - t_{20})} = \sqrt{2 \cdot 200 \cdot 80} \approx 178.9 \text{ м/с}.$$

Часть 2
Запишем уравнение теплового баланса для N пулек скорости $2v$:

$$c_{\text{воды}} m_{\text{воды}} (t_{100} - t_{20}) + N c_{\text{пульки}} m_{\text{пульки}} (t_{100} - t_{20}) = \frac{N (m_{\text{пульки}} (2v)^2)}{2}$$

Отсюда:

$$N = \frac{c_{\text{воды}} m_{\text{воды}} (t_{100} - t_{20})}{2 m_{\text{пульки}} v^2 - c_{\text{пульки}} m_{\text{пульки}} (t_{100} - t_{20})} =$$
$$= \frac{(4200 \cdot 0.2 \cdot 80)}{(2 \cdot 0.00015 \cdot 32000 - 200 \cdot 0.00015 \cdot 80)} = 9334 \text{ пульки}$$

Задание 5

Автор: Кайроллаев Е.
Два лазера на расстоянии L друг от друга поворачиваются с угловой скоростью ω. Найдите перемещение точки их пересечения в зависимости от времени, если в начальный момент времени они смотрели друг на друга. Угловая скорость определяется выражением:

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \text{ где } \varphi \text{ — угол}$$

Решение

В определённый момент времени t, лазеры были повёрнуты на угол φ. В этот момент их точка пересечения была на расстоянии

$$x = \frac{d}{2} \tan \varphi \qquad \text{(6 баллов)}$$

И так как φ изменяется по закону $\varphi = \omega t$, мы находим расстояние между ними:

$$x = \frac{d}{2} \tan(\omega t) \qquad \text{(6 баллов)}$$

Задание 6

Автор: Еркебаев А.

Снаружи температура равна $t_1 = -10$°C. Когда батареи в комнате нагреты до $t_0 = 50$°C, то температура в комнате поддерживается равной $t = 20$°C. Теперь, ночью температура опускается до $t_2 = -20$°C. Если не менять отопление, то каким станет температура T в доме? (Теплопередача между двумя объектами пропорциональна разности их температур).

Решение

Теплопередача между трубами отопления и комнатой, как и между комнатой и воздухом снаружи, пропорциональна разности их температур. Запишем первую теплопередачу как $P_1 = k_1(t_1 - t)$. В установившемся состоянии отдаваемая наружу тепловая мощность $k_2(t - t_2)$ равняется P_1, поэтому

$$k_1(t_0 - t) = k(t - t_1) \qquad \text{(4 балла)}$$

Теперь же, во втором случае

$$k_1(t_0 - T) = k_2(T - t_2) \qquad \text{(4 балла)}$$

Решая оба уравнения, получаем ответ:

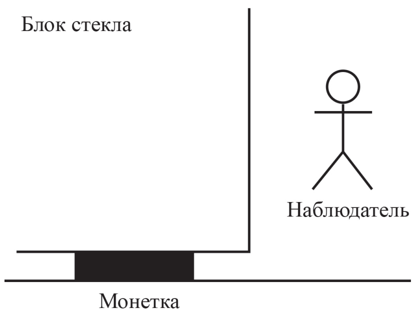
$$T = \frac{t_2(t_0 - t) + t_0(t - t_1)}{t_0 - t_1} \qquad \text{(3 балла)}$$

$$T = 15°C. \qquad \text{(1 балл)}$$

Задание 7

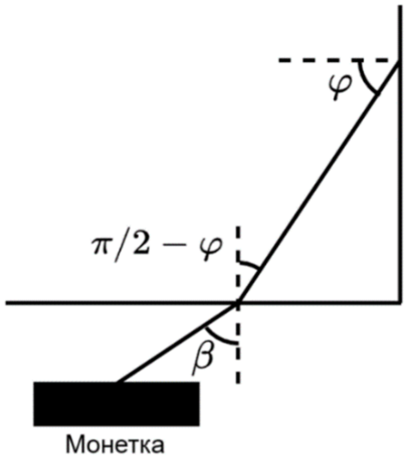
Автор: Еркебаев А.

Небольшую монетку положили на стол, а сверху на неё – прямоугольный блок стекла. Наблюдатель смотрит на монетку из боковой грани блока. При каком минимальном коэффициенте преломления n стекла монетки не будет видно?



Решение

Наблюдатель может не видеть монетку в силу полного внутреннего отражения лучей в стекле. Критический угол определяется соотношением $\sin\varphi = 1/n$ (2 балла). Теперь (см. рисунок справа) распишем закон преломления Снелла:



$$\sin\beta = n\sin(\pi/2-\varphi) = n\cos\varphi. \qquad \text{(2 балла)}$$

Запишем угол φ как функцию от коэффициента n:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-1} \qquad \text{(2 балла)}$$

То есть,

$$n = \sqrt{1+\sin^2\beta} \qquad \text{(2 балла)}$$

Полное отражение происходит во всех диапазонах β, включая верхнюю границу $\beta = \pi/2$ (1 балл), следовательно ответ

$$n = \sqrt{2} \qquad \text{(3 балла)}$$

Задание 8

Автор: Кайроллаев Е.

Юный велосипедист, спринтующий на дистанцию 10 км, первый километр проехал за 80 с. Каждый километр он проезжал на τ секунд больше предыдущего. Найдите τ, если велосипедист проехал всю дистанцию так, как если бы он затрачивал на каждый километр 82 секунды.

Решение

Из условия исходит, что велосипедист завтрачивал в среднем на $\Delta t = 2$ с (2 балла) больше, чем в первый километр, значит к концу у него накопилось $\Delta t_f = 10\Delta t$ "лишних"секунд. Очень просто можно решить эту задачу просуммировава вклад каждого километра (2 балла):

$$\begin{aligned}
&\Delta t_f = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)\tau = 45\tau \\
&10\Delta t = 45\tau && \text{(2 балла)} \\
&\tau = \frac{2}{9}\Delta t && \text{(4 балла)} \\
&\tau = 0.44 \text{ с} && \text{(2 балла)}
\end{aligned}$$

Однако, это решение не особо интересное и не работает для больших чисел, поэтому давайте используем более интересное (и быстрое) решение. Воспользуемся тем фактом, что для сумма линейно растущих чисел можно посчитать с помощью арифметической прогрессии:

$$\Delta t_f = \frac{0 + 9\tau}{2} \cdot 10$$
$$10\Delta t = 45\tau$$

Дальнейшее решение схоже с предыдущим.

Третий раунд

Задание 1

Автор: Еркебаев А.

Астронавт совершил посадку на сферический астероид. Измерения показали, что средняя плотность астероида составляет $\rho = 2720$ кг/м^3. Астронавт решил обойти пешком экватор астероида и вернуться к своему космическому модулю после одного оборота. За какое минимальное время он сможет вернуться обратно? Гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

Решение

Если астронавт движется с постоянной скоростью v, то в системе отсчёта, связанной с астронафтом, на него будет действовать центробежная сила. Наибольшее значение скорости достигается при равенстве этих сил:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \Longrightarrow v = \sqrt{gR} \qquad \text{(3 балла)}$$

Гравитационное притяжение астероида зависит от плотности как

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G}{R^2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi\rho GR}{3} \qquad \text{(4 балла)}$$

Всего путь у астронавта займёт $2\pi R$, поэтому

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{R}{g} = \frac{3\pi}{G\rho} \qquad \text{(3 балла)}$$

$$T = 120 \text{ мин} \qquad \text{(1 балл)}$$

Задание 2

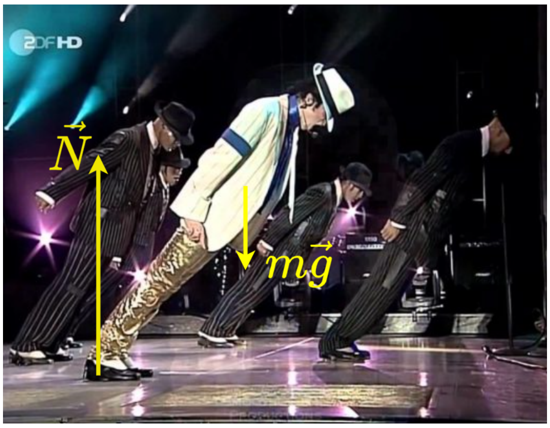
Автор: Кайроллаев Е.

Одним из знаменитых номеров Майкла Джексона было то, как он наклонялся вперёд, что, казалось бы, невозможно. Секрет был в том, что в каблуке его туфель была специальная выемка для упора, которая и не давала ему упасть. Определите синус максимального угла, на который он мог наклониться, если его масса была $m = 70$ кг, рост $h = 175$ см, расстояние от упора до кончиков пальцев ноги 20 см, а сам каблук выдерживал 1600 кг, до того, как сломается. Можете считать, что центр масс находится ровно посередине певца.

Решение

Расписывая моменты сил на Майкла Джексона, получаем:

$$mg\left(\frac{H}{2}\sin\alpha - d\right) = Pd \qquad \text{(6 баллов)}$$



Отсюда выражая α, получаем:

$$\sin\alpha = \frac{2}{H}\left(\frac{Pd}{mg} + d\right) \qquad \text{(6 баллов)}$$

В действительности, этот угол равен 49.61°, что немного больше того, насколько наклонялся певец – 45°. Теперь вы можете представить, насколько много уделялось внимания реквизитам, и насколько натренированным было тело певца.

Задание 3

Автор: Кайроллаев Е.

Если очень аккуратно нагревать воду, то вы получите перегретую воду – это вода, имеющая температуру больше 100 градусов, потому что в ней не было точек закипания. Даниал особым образом приготовил $V_0 = 3$ л такой воды, нагретой до температуры $t_1 = 110$°C. После этого, он положил в кастрюлю макароны, которые долго лежали на полке, с теплоёмкостью $C_2 = 3500$ Дж/кг. Какая будет конечная температура у макарон с водой, если кипение в перегретой воде начинается моментально? Температура комнаты $T_A = 25°C$, удельная теплота парообразования $L = 2300$ кДж/кг, а удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot°$ C).

Решение

Начальная масса воды равна $m_0 = \rho_в V_0$ (1 балл). При попадании макарон в кастрюлю начинается моментальное закипание, которое продолжается до тех пор, пока температура не опустится до $100°C$. Энергия, выделившаяся из-за уменьшения температуры полностью уходит в кипение воды (потому что оно проходит моментально):

$$L\Delta m = c(m_0 - \Delta m)(t_1 - t_k) \qquad \text{(1.5 балла)}$$

Между оставшейся водой и макаронами проходит теплообмен:

$$Q_w = c(m_0 - \Delta m)(t_k - t_r) \qquad \text{(1.5 балла)}$$
$$Q_s = C_2(t_r - t_A) \qquad \text{(1.5 балла)}$$
$$Q_s = Q_в \qquad \text{(1.5 балла)}$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$\Delta m = \frac{cm_0(t_1 - t_k)}{L + c(t_1 - t_k)} = 0.027 \text{ г} \qquad (2 \text{ балла})$$

$$t_r = \frac{c(m_0 - \Delta m)t_k + C_2 t_A}{C_2 + c(m_0 - \Delta m)} \qquad (2 \text{ балла})$$

$$t_r = 90°C \qquad (1 \text{ балла})$$

Задание 4

Автор: Кайроллаев Е.
Мирас, играясь с пружинками жёсткости k и длины l_0, заметил, что если растянуть такую пружинку на Δl, а потом вернуть в изначальное положение, её длина станет l. Проведя новые измерения, он понял, что коэффициент упругости на единицу длины не изменился. Найдите, изменение энергии в момент, когда он растянул пружинку на Δl.

Решение

Используя то, что отношение жёсткости пружины на длину не изменилось, записываем

$$\frac{k}{k_0} = \frac{k_2}{l} \Longrightarrow k_2 = \frac{kl}{l_0} \qquad (5 \text{ баллов})$$

Теперь, когда мы знаем новую жёсткость пружины, мы можем найти изменение энергии в момент, когда Мирас её растянул больше порога упругой деформации:

$$\frac{k\Delta l^2}{2} = Q + \frac{k_2(\Delta l + l_0 - l)^2}{2} \qquad (5 \text{ баллов})$$

Отюсда находим Q:

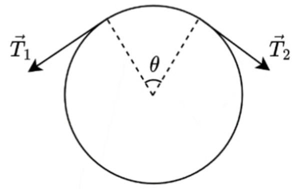
$$Q = \frac{k}{2}\left(\Delta l^2 - \frac{l}{l_0}(\Delta l + l_0 - l)^2\right) \qquad (2 \text{ балла})$$

Задание 5

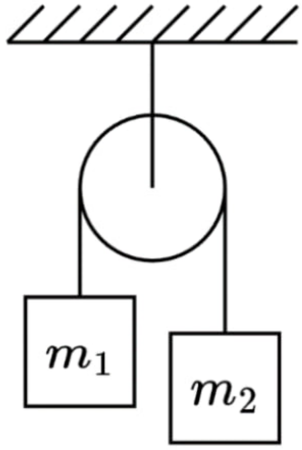
Автор: Еркебаев А.
Верёвка, обмотанная в несколько раз вокруг столба, может выдерживать большие натяжения, что, например, полезно для удержания целого корабля у причала. Эйлер впервые вывел, что для фиксированного значения натяжения T_1 на одном конце верёвки, обмотанного на угол (в радианах) вокруг столба, критическое значение натяжения на втором конце для удержания верёвки в равновесии, равно

$$T_2 = T_1 e^{-\mu\theta},$$

где μ – коэффициент трения покоя между верёвкой и столбом. Теперь рассмотрим обычную систему из двух грузов массами m_1 и m_2, привязанными к обоим концам верёвки, перекинутым через блок. Если $\mu = 0.4$, а $m_2/m_1 = 2$, какое ускорение a грузов?



а)



б)

Решение

Уравнения динамики для двух грузов и соотношение Эйлера для натяжения дают нам три уравнения:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g \qquad (3 \text{ балла})$$
$$m_2 a = m_2 g - T_2 \qquad (3 \text{ балла})$$
$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta} \qquad (3 \text{ балла})$$

Поскольку угол обмотки равен $\theta = \pi = 180^\circ$ (1 балл),

$$a = g\frac{\frac{m_2}{m_1}e^{\mu\pi} - 1}{\frac{m_2}{m_1}e^{\mu\pi} + 1} \approx \frac{3}{4}g \qquad (2 \text{ балла})$$

Задание 6

Автор: Кайроллаев Е.

Точно так же, как более точным определением скорости является $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, более точным определением удельной тепплоёмкости является:

$$C = \frac{\Delta Q}{m\Delta t}.$$

Экспериментатор Сырым придумал материал, который изменяет свою теплоёмкость линейно по закону

$$C = k(T + T_0),$$

где T_0 - температура плавления льда, а k - известный коэффициент пропорциональности. Найдите энергию, которую нужно потратить Сырыму, чтобы нагреть килограмм такого материала с T_1 до T_2.

Решение

Проводя аналогии с кинематикой, площадь под графиком теплоёмкости $C = cm$, является затраченной энергией, точно так же, как и площадь под графиком скорости является перемещением. Площадь под графиком теплоёмкости:

$$\Delta Q = \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot (T_1 - T_1) \qquad \text{(8 баллов)}$$

Подставляя значения C_1 и C_2, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{m}{2}(kT_1 + kT_0 + kT_2 + kT_0)(T_1 - T_1) \\ &= \frac{(T_2 - T_0)^2 - (T_1 - T_0)^2}{2} \cdot km \qquad \text{(3 балла)} \end{aligned}$$

Задание 7

Автор: Горшунов Н.

На завод пришло две партии лампочек. В первой партии лампочки имели маркировку 60 Вт, а вот во второй партии лампочки были непромаркированы. У техника Тамерлана была возможность измерить мощность немаркированных лампочек нормальным образом, но из-за знания, что задача должна быть олимпиадной, ему пришлось изощриться. Поэтому он взял лампочки с неизвестной мощностью и лампочки с эталонной мощностью 60 Вт, а также – коробку с термометром внутри. Затем он подключил в сеть 220 В две лампочки эталонной мощностью 60 Вт и три – неизвестной мощности и замерил время, за которое температура на термометре выросла на 5 градусов. Затем он подключил последовательно три лампочки эталонной мощности и две – неизвестной, и снова засёк время. В первом случае время составило 110 секунд, а во втором – 115. Чему равна мощность второй лампочки? Считать, что, из-за близости затраченного времени, теплопотери в обоих случаях были одинаковыми.

Решение

Поскольку термометр нагревается только от лампочек, скорость его нагрева прямо пропорциональна суммарной мощности, выделяющейся на лампочках внутри коробки. Кроме того, поскольку теплопотери сказано считать одинаковыми, значит, в обоих случаях за выделенное время выделилось одинаковое количество теплоты (т.к. один и тот же термометр нагрелся на одну и ту же величину). То есть:

$$P_1 t_{110} = P_2 t_{115}$$

$$\frac{U_{220}^2}{R_{1\text{ общ}}} \cdot t_{110} = \frac{U_{220}^2}{R_{2\text{ общ}}} \cdot t_{115} \qquad \text{(2 балла)}$$

$$\frac{U_{220}^2 t_{110}}{2R_{60\text{ Вт}} + 3R_{x\text{ Вт}}} = \frac{U_{220}^2 t_{115}}{3R_{60\text{ Вт}} + 2R_{x\text{ Вт}}} \qquad \text{(3 балла)}$$

Здесь мы не знаем сопротивлений лампочек. Но знаем, что их мощность записывается из соображения

$$P_{\text{ламп}} = \frac{U_{220}^2}{R_{\text{ламп}}} \Longrightarrow R_{60\ \text{Вт}} = \frac{U_{220}^2}{P_{60\ \text{Вт}}},\ R_{x\ \text{Вт}} = \frac{U_{220}^2}{P_{x\ \text{Вт}}} \qquad (2\ \text{балла})$$

$$\frac{U_{220}^2 t_{110}}{2\frac{U_{220}^2}{P_{60\ \text{Вт}}} + 3\frac{U_{220}^2}{P_{x\ \text{Вт}}}} = \frac{U_{220}^2 t_{115}}{3\frac{U_{220}^2}{P_{60\ \text{Вт}}} + 2\frac{U_{220}^2}{P_{x\ \text{Вт}}}} \qquad (2\ \text{балла})$$

$$\left(\frac{2}{P_{60}} + \frac{3}{P_x}\right) \cdot t_{115} = \left(\frac{3}{P_{60}} + \frac{2}{P_x}\right) \cdot t_{110}$$

$$P_x = P_{60} \cdot \frac{3t_{115} - 2t_{110}}{3t_{110} - 2t_{115}} = 60 \cdot \frac{345 - 220}{330 - 230} \qquad (2\ \text{балла})$$

$$P_x = 75\ \text{Вт} \qquad (1\ \text{балл})$$

Задание 8

Автор: Кайроллаев Е.

Арсен положил в печь железный кубик, который начал плавиться через час. После этого, он взял такой же железный кубик, с такой же температурой, положил его на верстак и разделил его на 9 частей, которым придал форму кубиков. За какое время железные слитки достигнут температуры плавления?

Решение

Энергия пропорциональна массе кубика, и так как $m = \frac{m_0}{9}$, получаем:

$$Q = \frac{Q_0}{9} \qquad (1\ \text{балл})$$

С другой стороны, мощность P теплообмена пропорциональна площади поверхности (сторона маленького кубика $a = \frac{a_0}{\sqrt[3]{9}}$ — 2 балла):

$$P = \frac{P_0}{\sqrt[3]{9^2}} \qquad (3\ \text{балла})$$

И так как время затрачиваемое на нагрев пропорционально передаваемой энергии и обратно пропорционально мощности теплопередачи:

$$t_0 \sim \frac{Q_0}{P_0} \qquad (4\ \text{балла})$$

$$t \sim \frac{Q}{P} = \frac{Q_0}{9} \cdot \frac{\sqrt[3]{9^2}}{P_0}$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt[3]{9^2}} \qquad (2\ \text{балла})$$

Четвертый раунд

Задание 1

Автор: Еркебаев А.

Скептики теории о глобальном потеплении утверждают, что таяние айсбергов не влияет на изменения уровня воды, поскольку суммарное гидростатическое давление не изменяется после плавления айсбергов. Хоть такое утверждение может быть вполне оправданным, они не учитывают, что есть много других причин, по которым уровень воды действительно повышается. Одной из таких причин является то, что вода термически расширяется с увеличением температуры:

$$\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T,$$

где знак «минус» показывает снижение плотности воды, а коэффициент термического расширения для воды равен $\beta = 2 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. Рассмотрим нашу планету в виде сферы радиуса $R = 6400$ км, которая, для простоты вычислений, полностью покрыта водой с постоянной толщиной $H = 3.5$ км. Насколько изменится уровень воды при увеличении температуры планеты на $T = 1$ К? Объем сферы радиусом R, и толщиной $h \ll R$ можете считать равной $V = 4\pi R^2 h$.

Решение

Начальный объем воды $V_0 = 4\pi R^2 H$ (2 балла), и начальна плотность равна ρ, следовательно, масса воды $m = 4\pi R^2 H\rho$. При увеличении толщины воды, мы можем записать

$$V = 4\pi R^2(H + \Delta H) \qquad \text{(1 балла)}$$

причем плотность равна $\rho + \Delta\rho$, что даёт нам массу $m = (\rho + \Delta\rho)V$ (1 балл). Приравнивая обе массы, получаем:

$$\rho V_0 = (\rho + \Delta\rho) \cdot 4\pi R^2(H + \Delta H)$$

Решая эти уравнения, и отбрасывая произведения малых величин (за показанную попытку отбросить величины второго порядка малости — 4 балла), получаем:

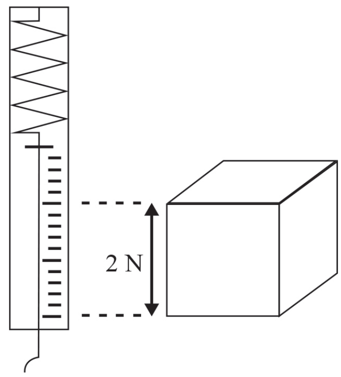
$$\rho\Delta H = -H\Delta\rho \qquad \text{(1 балл)}$$
$$\Delta H = H\beta\Delta T \qquad \text{(2 балла)}$$
$$\Delta H = 7 \text{ м} \qquad \text{(1 балл)}$$

Задание 2

Автор: Еркебаев А.

Алишер имеет небольшой куб из неизвестного металла, секундомер и пружинный динамометр. Он хочет вычислить плотность куба, однако измерив его вес $P = 1.8$ Н, Алишер вспомнил, что он забыл взять с собой линейку для определения размеров кубика. Тем не менее, к нему пришла следующая идея.

Он измерил сторону кубика а делениями динамометра и получил значение $F_a = 2$ Н. Затем он взял большой лист бумаги, срисовал карандашом шкалу динамометра несколько раз, и расположил его вертикально. Серией экспериментов Алишер выяснил, что если сбрасывать кубик с высоты $F_H = 10$ Н без начальной скорости, то время падения равно $t = 0.2$ с. Полагая, что $g = 10$ м/с^2 помогите Алишеру вычислить плотность кубика.



Решение

Показания динамометра подчиняются закону Гука $F = kx$, и потому результаты эксперимента Алишера можно использовать для конвертации сила-длина через жёсткость пружины k следующим образом:

$$\frac{gt^2}{2} = \frac{F_H}{k} \Longrightarrow k = \frac{2F_H}{gt^2} = 50\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \qquad \text{(5 баллов)}$$

Теперь можно измерить плотность куба:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P/g}{(F_a/k)^3} \qquad \text{(5 баллов)}$$

$$\rho = 2800\ \text{кг/м}^3. \qquad \text{(2 балла)}$$

Задание 3

Автор: Еркебаев А.

Деревянный блок высотой 7 см и стороной основания 3 см расположен вертикально на шероховатом столе. Если блок легонько подталкивать сбоку кончиком карандаша, то он будет наклоняться относительно одного из своих рёбер, но не проскальзывать. При каком минимальном коэффициенте трения такое возможно?

Решение

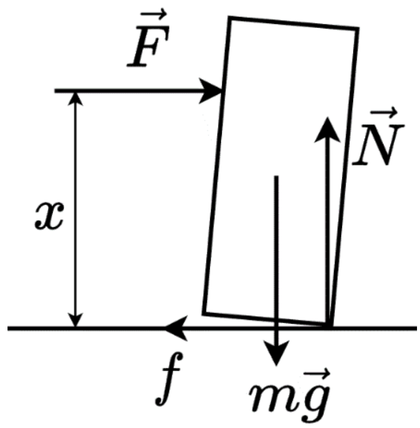
Задача 3 Пусть точка приложения силы F расположена на высоте $x < 7$ см. В результате будет появляться сила трения, которая противодействует карандашу, т.е. $f = F$ (2 балла). Баланс моментов сил относительно ребра блока даёт

$$Fx = mg \cdot \frac{a}{2} \qquad \text{(4 балла)}$$

где $a = 3$ см. Сила $f \leq \mu N = mg$, так что в предельном случае $x = 7$ см, и следовательно

$$\mu = \frac{3}{2 \cdot 7} \qquad \text{(4 балла)}$$

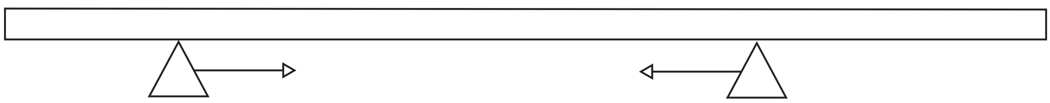
$$\mu = 0.214 \qquad \text{(2 балла)}$$



Задание 4

Автор: Еркебаев А.

Представьте, что перед Вами есть обычная линейка. Если положить её горизонтально на две одинаковые опоры (два карандаша, либо Ваши пальцы или рёбра ладоней), а затем медленно сдвигать эти опоры ближе друг к другу, то они обязательно сойдутся к центру линейки. Даже



если опоры изначально стоят несимметрично, линейка всегда остаётся в состоянии равновесия. Объясните это явление через законы механики. *Вы можете проверить сами: этот опыт работает и с другими канцелярскими принадлежностями!*

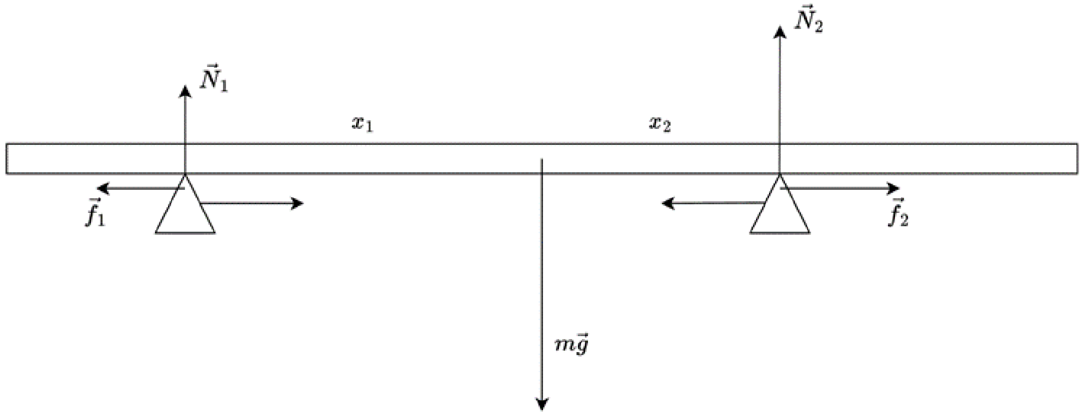
Решение

Возьмём произвольное положение, когда опоры 1 и 2 находятся на расстоянии x_1 и x_2 от центра линейки. Схематично укажем действие сил реакции опоры N_1 и N_2, силы тяжести линейки mg, а также сил трения f_1 и f_2. Так как опоры надо двигать достаточно медленно, линейка находится в состоянии равновесии. Баланс сил в вертикальном направлении выражается как $mg = N_1 + N_2$ (1 балл), а уравнение моментов относительно центра масс линейки: $N_1 x_1 = N_2 x_2$ (1 балл), а значит силы реакции опоры можно расписать как

$$N_1 = mg\frac{x_2}{x_1 + x_2}, \qquad N_2 = mg\frac{x_1}{x_1 + x_2} \qquad \text{(3 балла)}$$

Как видно, сила реакции выше у той опоры, которая находится ближе к центру масс. Этот факт важен для анализа явления.

Процесс сближения опор заключается в том, что опоры приближаются попеременно. Допустим, к центру линейки движется опора 1, а опора 2 неподвижна. В этом случае на опору 1 действует



трение скольжения $f_1 = \mu N_1$, а на опору 2 — трение покоя, которое меньше предельной силы трения μN_2 (2 балла за утверждение).
Линейка неподвижна, а значит $f_1 = f_2$, или, с учётом вышесказанного, получаем неравенство $N_1 < N_2$ (2 балла). Отсюда выясняем, что движется та опора, которая находится дальше от центра линейки, и постепенно обе опоры равномерно приближаются к центру линейки, никогда не пересекая центр масс и не позволяя линейке перевернуться.
Окончательный вывод — 4 балла.

Задание 5

Автор: Кайроллаев Е.
Амир едет в автобусе, не держась руками за поручни и балансируя лишь за счёт ног. В определённый момент времени автобус ехал со скоростью v и начал поворачивать вдоль радиуса R. Амир в это время стоял ровно, на одной ноге. Найдите, насколько Амир должен подвинуть свой центр масс (расположенный на высоте h) чтобы компенсировать центробежную силу, если его масса m (можете считать что высота центра масс не изменяется).

Решение

Момент, создаваемый центробежной силой (в системе отсчёта Амира), равен моменту силы тяжести:

$$mgl = \frac{mv^2}{R}h \qquad \text{(6 баллов)}$$
$$l = \frac{v^2 h}{gR} \qquad \text{(6 баллов)}$$

Задание 6

Автор: Кайроллаев Е.

Данная задача состоит из двух зависимых между собой пунктов. При этом можете считать, что каждый пункт вызывается на бой отдельно и каждый ответ предыдущего пункта можете считать известным.

Пункт 1

На одной прямой с Землёй и Луной, между ними, находится точка, в которой притяжения Луны и Земли равны. Найдите расстояние d до этой точки с Земли, если масса Земли $M_E = 6.0{\cdot}10^{24}$ кг, масса Луны $M_M = 7.4 \cdot 10^{22}$ кг, а расстояние между их центрами $R = 384000$ км.

Пункт 2

В знаменитом рассказе Жюля Верна «С Земли на Луну», герои отправились на Луну, выбрав прямую траекторию. Найдите наименьшую скорость, при которой это ещё возможно, если радиус Земли $r = 6400$ км.

Решение

Часть 1

Запишем равенство сил в точке равновесия для тела массой m:

$$\frac{GM_Em}{D^2} = \frac{GM_Mm}{(R-D)^2} \qquad \text{(2 балла)}$$

Отсюда получаем квадратное уравнение:

$$(M_E - M_M)d^2 - 2M_ERd + M_ER^2 = 0, \qquad \text{(2 балла)}$$

которое имеет два положительных решения:

$$d_{1,2} = \frac{M_ER \pm \sqrt{M_EM_MR^2}}{M_E - M_M} \qquad \text{(5 баллов)}$$

Учитывая, что нам нужна точка между Землёй и Луной ($d < R$), получаем:

$$d = \frac{M_ER - \sqrt{M_EM_MR^2}}{M_E - M_M} \qquad \text{(1.5 балла)}$$

$$d = 347000 \text{ м} \qquad \text{(1.5 балла)}$$

Часть 2

В критическом случае, наши герои долетят до точки равновесия, после чего их начнёт притягивать Луна, и он начнут падать на неё без начальной скорости, следовательно им достаточно долететь до точки равновесия. Записывая закон сохранения энергии для тела массой m, получаем (за каждое слагаемое в уравнении — 2 балла):

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} - \frac{GM_Em}{r} - \frac{GM_Mm}{R} = -\frac{GM_Em}{d} - \frac{GM_Mm}{R-d}$$

Решая сиё уравнение, приходим к ответу:

$$v_{\min} = \sqrt{2G\left(\frac{M_E}{r} + \frac{M_M}{R} - \frac{M_E}{d} - \frac{M_M}{R-d}\right)} \qquad \text{(2 балла)}$$

Задание 7

Автор: Кайроллаев Е.

Ахмет смастерил вогнутое сферическое Зеркало с радиусом R. Однако, он не знал, что сферические зеркала не являются идеальными и дальше от центра фокус начинает смещаться (происходит так называемая сферическая аберрация). Найдите соотношение ε минимального и максимального фокальных расстояний для концентрического кольцеобразных участков зеркала. Расстояние между точками A и B равно $d = R\sqrt{2}$.

Решение

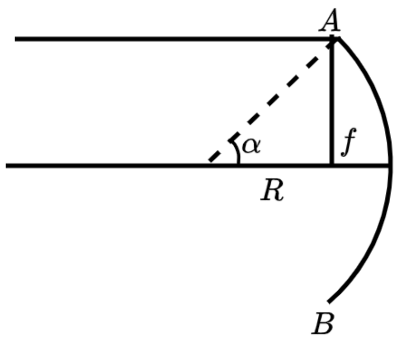
Минимальное фокальное расстояние достигается, когда лучи падают близко к главной оптической оси. В данном случае участок зеркала можно рассматривать как участок тонкого зеркала. Тогда, максимальное фокусное расстояние:

$$F = \frac{R}{2} \qquad \text{(3 балла)}$$

Из условия мы знаем, что $AB = R\sqrt{2}$, из этого мы можем найти $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(3 балла)}$$

Следовательно, $\alpha = 45° = \frac{\pi}{2}$. Теперь, построим ход лучей, параллельных ГОО:



Отсюда находим минимальное фокусное расстояние f:

$$f = R - R\sin\alpha \qquad \text{(3 балла)}$$

Тогда, отношение минимального на максимальное фокусное расстояние:

$$\varepsilon = \frac{f}{F} = \frac{R - R\sin\alpha}{0.5R} = 2 - \sqrt{2} \qquad \text{(3 балла)}$$

Пятый раунд

Задание 1

Автор: Кайроллаев Е.
Экспериментатор Сырым в тёплый солнечный день поставил на улице (на траву) несколько одинаковых конусов с очень тонкими и лёгкими пропеллерами сверху (см. рисунок). Определите, который из конусов будет вращаться быстрее остальных (рассматривайте явления в пределах классической физики):

1. Конус, снизу которого подложили белый листок;
2. Конус, снизу которого подложили зеркало;
3. Конус, снизу которого подложили черный листок;
4. Конус, снизу которого ничего не подкладывали.

Решение

За каждый пункт 2.5 балла

1. Горячий воздух легче холодного и поэтому движется вверх;
2. Горячий воздух получает тепло в результате солнечного излучения и от теплопроводности Земли;
3. Тепло, получаемое через излучение намного меньше, чем от теплопроводности;
4. Чем больше отражает тело, тем меньше оно нагревается, следовательно черный листок будет самым горячим, а зеркало — самым холодным.

Вывод: Быстрее всего будет вращаться пропеллер на конусе, под который подложили черный листок (2 балла)

Задание 2

Автор: Кайроллаев Е.
Вам даны два факта.

1. При шумоизоляции комнат используют материал, очень похожий на поролон или пенопласт, имеющий пористую структуру.
2. Оптические микроскопы используют для наблюдения клеток, но не могут использовать для наблюдения вирусов (которые намного меньше клеток).

Используя эти два факта, объясните принцип работы шумоизоляции компанты и почему тонкие листы (на рисунке снизу) изоляционного материала почти не имеют эффекта при шумоизоляции.

Решение

За каждый пункт 4 балла

1. Множественные преломления и отражения в поролоне приводят к рассеянию звука
2. Аналогично свету, звук является волной.
3. Так же как и свет, звук очень легко огибает предметы меньше, чем длина его волны, поэтому тонкие листы очень слабо влияют на рассеяние звука. Альтернативно: звук не успевает рассеяться в тонких листах

Задание 3

Автор: Кайроллаев Е.

Две деревянные линейки положили на третью и прислонили друг к другу как показано на рисунке ниже. Определите максимальный угол между линейками, находящимися в состоянии покоя, если коэффициент трения дерева о дерево μ.

Решение

Записывая условия равновесия, $\Sigma M = 0, \Sigma F = 0$, и учитывая $F_1 = \mu N_1, F_2 = \mu N_2$ (1 балл) получаем

$$\mu N_2 L \sin(\alpha/2) + \mu N_1 L \cos(\alpha/2) = 0.5 mgL \sin(\alpha/2) \qquad \text{(3 балла)}$$
$$mg = \mu N_2 + N_1 \qquad \text{(3 балла)}$$
$$N_2 = \mu N_1 \qquad \text{(3 балла)}$$

Решая совместно эти уравнения, получаем:

$$\alpha = 2\tan^{-1}\left(\frac{\mu}{1-\mu^2}\right) \qquad \text{(3 балла)}$$

Задание 4

Автор: Еркебаев А.

Космонавт Маргулан, испугавшись реакции участников на его длинные задачи, решил улететь с Земли в космос. Вылетев на орбиту Земли, он решил выпить Fuse Tea, и случайно пролил каплю радиусом R. Оцените период колебаний малых изменений эллипсоидной формы капли, если плотность напитка ρ и поверхностное натяжение σ. Известно, что поверхностная энергия плёнки жидкости площади S определяется как $Q = \sigma S$.

Решение

Найдем размерность σ:

$$[\sigma] = \left[\frac{Q}{S}\right] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}^2}\right]. \quad \text{2 балла}$$

Очевидно, период пропорционален степеням R, σ, ρ:

$$T = \rho^\alpha \sigma^\beta R^\gamma \qquad \text{(2 балла)}$$

Отсюда получаем:

$$[\text{с}] = \left[\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)^\alpha \left(\frac{\text{кг}}{\text{с}^2}\right)^\beta (\text{м})^\gamma\right] \qquad \text{(2 балла)}$$

Зная, что размерность справа должна быть равна размерности слева:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \gamma - 3\alpha = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases}$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\begin{aligned} &\alpha = 0.5 && \text{(2 балла)} \\ &\beta = -0.5 && \text{(2 балла)} \\ &\gamma = -3/2 && \text{(2 балла)} \end{aligned}$$

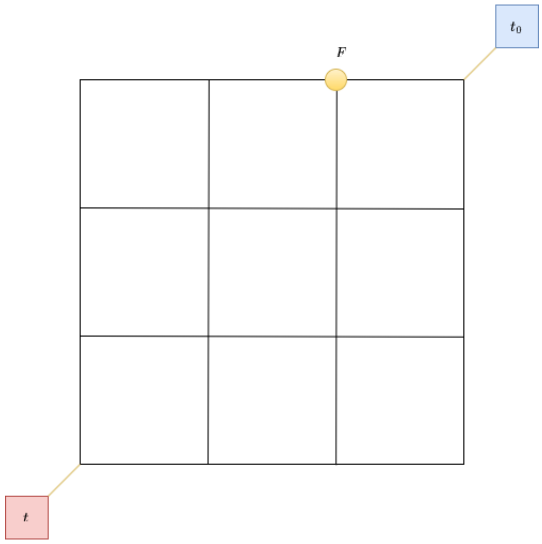
Запишем финальную формулу:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\rho R^2}{\sigma}}$$

Задание 5

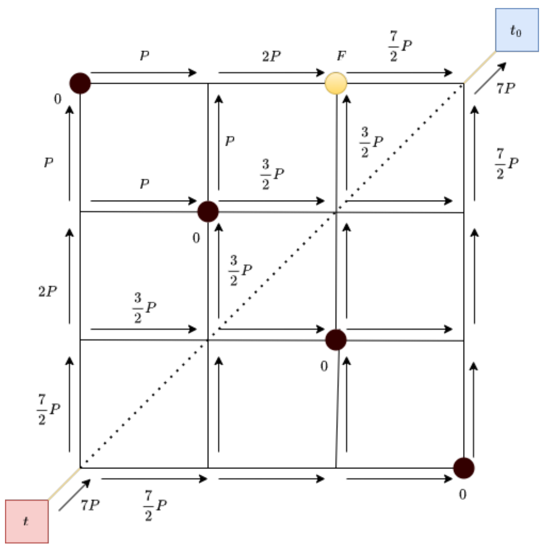
Автор: Кожабек А.

Атай решил установить в своем доме обогрев для пола и обратился в компанию «Шырли-Мырли», которая установила систему, состоящую из одинаковых теплопроводящих стержней, двух резервуаров, в которых поддерживаются температуры t и t_0. Теплопроводящая система теплоизолирована. Приток тепла осуществляется только от красного резервуара при температуре t, а отвод – через синий резервуар при температуре t_0.



Решение

Заметим, что по закону Ньютона-Рихмана, значение теплопроводности P прямо пропорционально изменению температуры Δt - точно так же, как и в электродинамике сила тока пропорциональна разности потенциалов (2 балла). Применяя аналогию, пользуемся симметрией в системе и расставляем значения мощности теплопередачь в каждом стержне (3 балла).



Заметим, что по вышеупомянутому закону,

$$P = \varkappa \cdot (t - t_0) \Longrightarrow \frac{P}{\varkappa} = t - t_0 \qquad \text{(2 балла)}$$

Не трудно заметить, что:

$$t - t_F = \frac{\frac{7}{2}P}{\varkappa} + \frac{\frac{3}{2}P}{\varkappa} + \frac{\frac{3}{2}P}{\varkappa} + \frac{P}{\varkappa} + \frac{2P}{\varkappa} = \frac{19P}{2\varkappa} \qquad \text{(3 балла)}$$

$$\Longrightarrow t_F = t - \frac{19P}{2\varkappa} = t - \frac{19}{2}(t - t_0) = 11.5t_0 - 8.5t \qquad \text{(2 балла)}$$

Задание 6

Автор: Бисимби Д.

С какой скоростью и в каком направлении должен лететь самолёт на экваторе, чтобы при всех перелётах локальные времена в пункте отправки и в пункте посадки были одинаковые? Считать, что локальное время всегда определяется положением солнца в небе при наблюдении в том месте, а радиус экватора $R = 6400$ км.

Решение

- Солнце двигается на небе из за вращения Земли вокруг своей оси (будем пренебрегать вращенеием Земли вокруг Солнца). (2 балла)

- Если самолёт будет двигаться против вращения Земли со скоростью, равной скорости вращения Земли, то в системе отсчёта Солнца самолёт практически застынет (направление может быть ещё написано “на запад”). (4 балла)

- Так относительно самолёта Солнце не сдвинется на небе, и все посадки и отправки будут совершаться в одно и то же локальное время. (3 балла)

- Скорость движения поверхности Земли найдётся через ее угловую скорость и радиус. Период обращения земли вокруг своей оси T= 24 часа.

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot R_{earth} = 465\ \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \text{(2 балла)}$$

- Приравнивание угловой скорости самолёта к угловой скорости Земли с указанием направления движения даёт полный балл.

Задание 7

Автор: Кайроллаев Е.

Дамир и Мирас, приехав в Астану, снова решили поиграть с мячиком, но в этот раз позвали

Бекасыла. Мирас пошёл на 10 этаж и открыл окно, Дамир встал ровно под окном Мираса, а Бакасыл поднялся ещё выше, ровно над Мирасом. Бекасыл отпускает мяч, и когда он пролетаем мимо Мираса, тот кричит "Мяч!". После этого Дамир ловит мяч и тоже кричит "Мяч!". Барон Мюнхаузен, проходивший мимо их дома заметил их необычную игру и засёк время t между двумя возкликами о мяче и в уме вывел формулу, которая помогает понять, на какой этаж поднялся Бекасыл. Помогите ему найти эту формулу, если высота одного этажа $h_0 = 3$ м, и наши герои примерно одного роста.

Решение

Так как высота героев примерно одинакова, мы можем считать, что расстояние между ними равно разности между этажами, на которых они находятся, то есть для n этажей расстояние равно $H = n\Delta h$ (1 балл). Запишем уравнения кинематики:

$$L = v_M + \frac{gt^2}{2} \qquad \text{(4 балла)}$$

$$v_M = \sqrt{2g\Delta h(n-10)} \qquad \text{(4 балла)}$$

Решая уравнения, получаем:

$$n = 10 + \frac{(2L - gt^2)^2}{2g\Delta h t^2} \qquad \text{(3 балла)}$$

Задание 8

Автор: Кайроллаев Е.

Дамир и Мирас сидят на астероидах, которые вращаются между собой со скоростью ω и соединены стержнем длины L. Массы наших героев меньше масс астероидов. Найдите скорость с которой другой астеорид массой упал на астероид с Мирасом, если система Мирас-Дамир перестала вращаться. Гравитацией можете пренебречь.

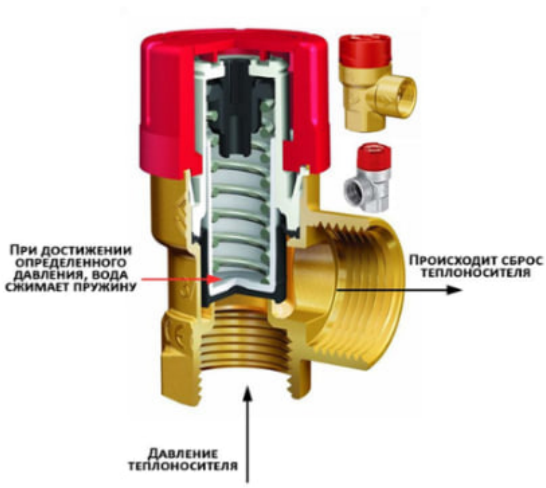
Решение

Недостаточно условий (12 баллов). Да, такое бывает. Нет, мы не специально.

Шестой (Финальный) раунд

Задание 1

Автор: Горшунов Н.



Один автомеханик занимался починкой топливного насоса и обнаружил неисправный перепускной клапан. Перепускной клапан – механизм, позволяющий протекать жидкости только при достижении некоторого целевого давления. Одна из простейших конструкций, которую и имел данный клапан – трубка, закрытая подвижным поршнем, который прижимается пружинкой. Чтобы жидкость смогла течь, ей необходимо отжать пружинку. В данном случае пружинка ослабла, а потому клапан не держал необходимое давление в 4 атм. У механика не было аналогичного клапана, но у него была другая пружинка подходящего диаметра длиной 9 см и жёсткостью 600 Н/м – и он сообразил, что незачем искать новый клапан, достаточно просто вырезать из имеющейся пружины фрагмент нужной длины. Быстро в уме прикинув необходимый размер, он вставил вырезанную часть в клапан – и всё заработало. Какой длины пружину он вырезал, если целевая длина в сжатом состоянии – 2 см, площадь поперечного сечения отверстия – 50 мм^2, а этим механиком был Альберт Эйнштейн?

Решение

Исходя из условия, пружина должна начинать пропускать жидкость при давлении, большем $P_0 = 4$ атм. Тогда сила, с которой она давит на поршень в этот момент, равняется $F = P_0 S$ (1 балл). А эта сила — ни что иное, как сила Гука, т.е. $P_0 S = k\Delta l = k(l - l_0)$ (2 балла), где l — длина нерастянутой пружины, то есть той самой, которую вырежет Альберт, а l_0 — длина в сжатом состоянии, т.е. 2 см (1 балл). Осталось только вспомнить, что, отрезая от пружины длины L кусочек длины l, мы получим пружину новой жёсткости $k = k_0 L/l$ (3 балла). Отсюда:

$$P_0 S = k_0 \frac{L}{l}(l - l_0) = k_0 L - \frac{k_0 L l_0}{l} \qquad \text{(3 балла)}$$

$$l = \frac{k_0 L l_0}{k_0 L - P_0 S} \qquad \text{(1.5 балла)}$$

$$l \approx 3.18 \text{ см} \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Задание 2

Автор: Еркебаев А.

В известном эксперименте по разрезанию льда, медная проволока с двумя одинаковыми грузами массой m, подвешенными за оба её конца, подвешивается на большой блок льда, создавая дополнительное давление и «разрезая» его. В результате, в области увеличенного давления лёд начинает плавиться, проволока медленно проходит через лёд, а вода снова замораживается, так как давление возвращается в норму. В итоге проволока может полностью пройти через блок льда, но не разрезает его! Полагается, что этот эксперимент показывает сдвиг температурной точки плавления льда при увеличении давления в его области, но простыми вычислениями можно показать, что требуемое давление слишком большое, а утверждение слишком упрощено. В следующем эксперименте, рассмотрим блок толщиной $L = 10$ см и температурой $T_0 = -10$°C, на который подвешивается проволока диаметром $d = 1$ мм. Лёд подчиняется соотношению Клапейрона-Клаузиуса, которое связывает температурную точку фазового перехода T (плавление, испарение, и т.д.) как функция от внешнего давления P. При температурах около $0°C$ сдвиг температуры приблизительно линеен от изменения давления:

$$P = \alpha \Delta T,$$

где $\alpha = -1.1 \cdot 10^7$ Па/К. Знак «минус» показывает, что точка плавления снижается при увеличении внешнего давления. Полагая, что ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2, рассчитайте минимальную массу одного из грузов m для того, чтобы проволока разрезала блок.

Решение

Точка плавления должна быть равна T_0 для плавления льда, так что $\Delta T = -10$ К (2 балл), и значит дополнительное давление равно $P = 1.1108$ Па (2 балл). Площадь контакта между льдом и проволокой равна $S = LD = 10^{-4}$ м^2 (3 балла), а сила давления равна $2mg$ (3 балла), так что

$$m = \frac{\Delta PS}{2g} \approx 5600 \text{ кг} \qquad \text{(3 балла)}$$

В действительности, такое явление происходит преимущественно за счёт теплопроводимости проволоки и свойств его материала, действующих на поверхность льда.

Задание 3

Автор: Митюкова А.

Лесной колдун предпочитал варить свои зелья в волшебном котелке, способным нагреваться до 400 градусов цельсия. Однако на достижение такого результата уходило много времени, и колдун решил обзавестись нагревательным элементом. Он решил, что распрощается со своим котелком, только если новый прибор сможет плавить янтарь, но оставлять цинк в твердом состоянии. Волшебник отправился в город, где в магазине электротехники ему приглянулась электрическая плита. В магазине колдун решил проверить товар. Плита была без терморегулятора и была рассчитана на подключение в сеть с напряжением 220 В, однако розетки в помещении были слабые и давали напряжение только в 150 В, поэтому плита нагрелась не до максимального значения, а лишь до лишь до значения 300 градусов Цельсия. Обрадованный, колдун вернулся домой, чтобы скорее опробовать новинку, однако он не учел, что в его лесной хижине не было электричества. Тогда волшебник постарался наколдовать источник энергии, но он был плохо знаком с электродинамическими заклинаниями и смог сделать только источник, дававший напряжение в 200 В. Имеет ли смысл волшебнику отправлять свой любимый котелок на покой? Теплоотдачи котелка и плиты одинаковы и пропорциональны разности температур. Сопротивление электрической плиты постоянно. Температура воздуха и в магазине, и в хижине 20 градусов.

Температура плавления некоторых веществ, °C					
водород	-259	натрий	98	медь	1085
кислород	-219	олово	232	чугун	1200
азот	-210	свинец	327	сталь	1500
спирт	-114	янтарь	360	железо	1539
ртуть	-39	цинк	420	платина	1772
лед	0	алюминий	660	осмий	3045
цезий	29	серебро	962	вольфрам	3400
калий	63	золото	1064		

Решение

Пусть R - сопротивление плиты и k – коэффициент теплоотдачи, S – площадь границы раздела тел. Запишем уравнение теплового равновесия для случая, когда плита включена в розетку в магазине:

$$\frac{U_1^2}{R} = kS(t_1 - t_0) \qquad \text{(4 балла)}$$

Запишем уравнение теплового равновесия для случая, когда волшебник включил плиту у себя дома

$$\frac{U_2^2}{R} = ks(t_2 - t_0) \qquad \text{(4 балла)}$$

Отсюда получим выражение для температуры, до которой нагреется плита дома у волшебника:

$$t_2 = \frac{U_2^2}{U_1^2} \cdot (t_1 - t_0) + t_0 \qquad \text{(2 балла)}$$

$$t_2 = \frac{200^2}{150^2} \cdot (300 - 20) + 20 = 518°C \qquad \text{(1 балл)}$$

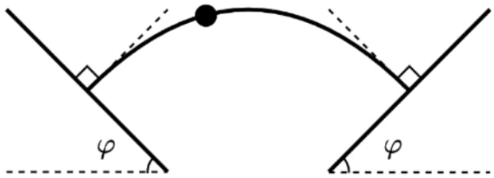
Так как цинк плавится при температуре 420 градусов, а полученное значение явно больше, то эта плита является слишком мощной для колдуна. Он сможет её использовать только если создаст источник, продуцирующий меньшее напряжение.

Задание 4

Автор: Еркебаев А.

Когда упругий мячик подпрыгивает вертикально над горизонтальной поверхностью, его усреднённая по времени кинетическая энергия $\overline{K_0}$ вдвое больше потенциальной энергии $\overline{\Pi}_0$.

Мяч подпрыгивает между двумя симметричными плитами, расположенные под углами φ к горизонту. Если усреднённая за большой промежуток времени кинетическая энергия мяча равна $\overline{\text{K}}$, а потенциальная энергия мячика относительно его наинизшего положения $\overline{\Pi}$, найдите величину $\alpha = \overline{\text{K}}/\overline{\Pi}$ как функцию угла φ.



Решение

Пусть скорость мяча прямо перед удар о плиту равна v_0. В этом положении потенциальная энергия нулевая, так что полная механическая энергия мяча равна кинетической энергии в этом положении:

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2}. \qquad \text{(3 балла)}$$

Горизонтальная составляющая скорости мяча $v_0 \sin\varphi$ постоянна, и тогда соответствующая этой компоненте кинетическая энергия $K_\text{г} = \frac{mv_0^2 \sin\varphi}{2}$ (3 балла) (тоже не изменяется). Обозначая $K_\text{в}$ как «вертикальную» компоненту кинетической энергии, можно написать

$$K_0 = \overline{K_\text{г}} + \overline{K_\text{в}} + \overline{\Pi} \qquad \text{(2 балла)}$$

$$\overline{\Pi} = 2\overline{K_\text{в}} \qquad \text{(2 балла)}$$

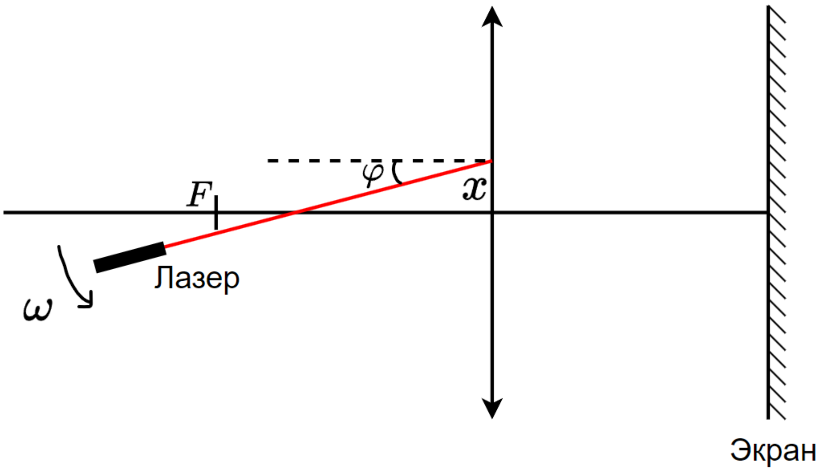
Решая эти уравнения, получаем:

$$\alpha = \frac{\overline{K_\text{г}} + \overline{K_\text{в}}}{\overline{\Pi}} = \frac{1 + 3\varphi}{2} \qquad \text{(2 балла)}$$

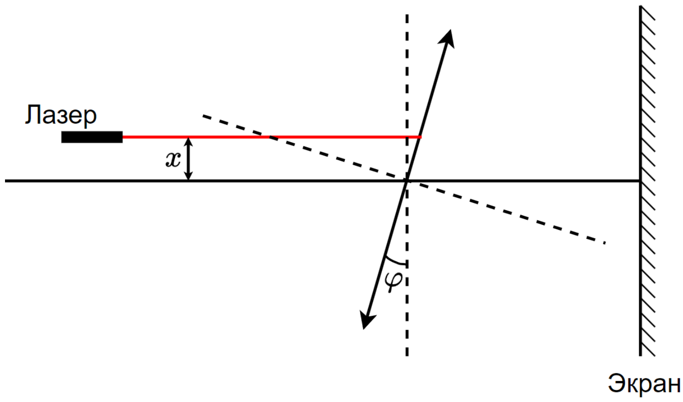
Задание 5

Автор: Кайроллаев Е.

Данная задача состоит из двух зависимых между собой пунктов. При этом, можете считать, что каждый пункт вызывается на бой отдельно и каждый ответ предыдущего пункта можете считать известным.

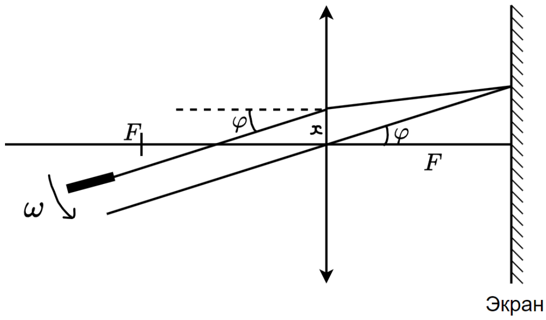


Играясь с лазером, Алишер собрал некую оптическую систему, изображённую на рисунке ниже. Лазер светил параллельно главной оптической оси на расстоянии x от неё на собирающую линзу, в результате чего получал точку на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы. Начав вращать лазер с угловой скоростью ω, точка начала двигаться с некоторой скоростью.
Пункт 1. Найдите скорость точки в зависимости от времени, если в момент времени $t = 0$ лазер был параллелен главной оптической оси.
После этого Алишер вернул лазер в начальное положение и повернул линзу на угол φ вокруг её центра. В данном случае луч пересекает ГОО раньше, чем фокальную плоскость линзы.
Пункт 2. Найдите угол, на который преломился луч лазера



Решение

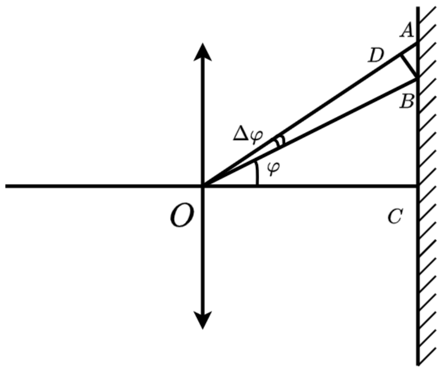
Часть 1



С помощью построения несложно заметить, что при любом расстоянии x, расстояние между точкой падения лазера и ГОО задаётся углом φ между лазером и ГОО:

$$y = F \tan \varphi$$

Рассмотрим перемещение изображения лазера со скоростью v за малый отрезок времени Δt:



На рисунке:

- $OC = F$
- $OB = \dfrac{F}{\cos \phi}$ (2 балла)
- $AB = v\Delta t$
- Мы рассматриваем малый отрезок времени, поэтому можно записать $OD \approx OB$ (2 балла)
- $DB = OB\Delta\varphi$ (2 балла)
- $\angle ABD = \varphi$ (2 балла)
- $\varphi = \omega t$

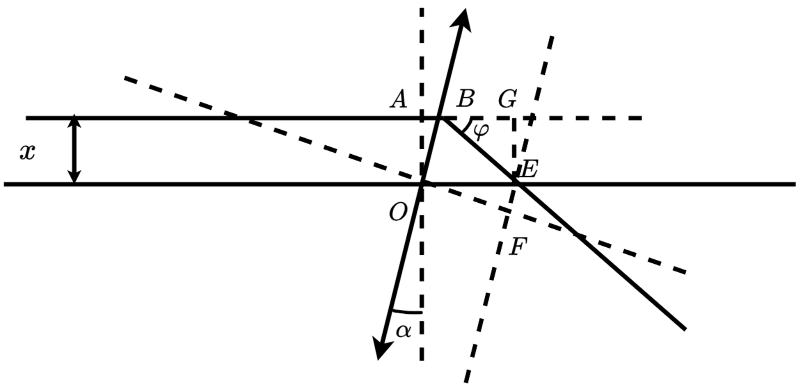
Отсюда, можем записать:

$$\cos\angle ABD = \cos\varphi = \frac{\left(\frac{F}{\cos\phi}\right)}{v\Delta t}. \qquad \text{(2 балла)}$$

Тогда, конечный ответ:

$$v = \frac{F\omega}{\cos^2(\omega t)}. \qquad \text{(2 балла)}$$

Часть 2



Через построение так же находим все углы.

1. OF — новая ГОО линзы
2. FC — фокальная плоскость
3. преломлённый луч пересекает старую ГОО в фокальной плоскости (2 балла)
4. $AB = x\tan\alpha$ (2 балла)
5. $GE = x$
6. $\tan\varphi = \dfrac{GE}{BG}$ (2 балла)
7. $OE = \dfrac{F}{\cos\alpha}$ (2 балла)

Отсюда находим

$$BG = \frac{F}{\cos\alpha} - t\tan\alpha \qquad \text{(3 балла)}$$

Соответственно, находим конечный угол:

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\frac{F}{\cos\alpha} - x\tan\alpha}\right) \qquad \text{(1 балл)}$$

Задание 6

Автор: Гриднев И.

Во время Наурыза фейерверк отклонился от ожидаемой траектории и взорвался точно в вершине двусторонней покатой крыши (крыша представляет собой двугранный угол) одного из городских домов. Известно, что перед взрывом снаряд полностью погасил свою скорость. В результате снаряд разделился на большое количество одинаковых кусочков, которые начали равномерно лететь во все стороны. Также в момент взрыва из точки попадания снаряда откололись кусочки черепицы и начали практически без трения и начальной скорости соскальзывать по обоим "направлениям"крыши. Через неизвестные времена t_1 и t_2 от момента взрыва снаряды фейерверка попали точно в эти кусочки черепицы соответственно с каждой из сторон. Известно, что $t_1^{-2} + t_2^{-2} = \frac{mg^2}{8E}$, где m - масса фейерверка, E - энергия взрыва. Определите угол раствора крыши.

Решение

0) Докажем вспомогательный факт

Геометрическое место всех возможных положений кусочков черепицы через время t — окружность диаметром $\dfrac{gt^2}{2}$ и верхней точкой в точке взрыва фейерверка.
Доказательство: Рассмотрим скатывание кусочка черепицы по крыше с углом α с вертикалью. Ускорение кусочка — $a = g\cos\alpha$ (0.5 балла). Следовательно, проейденное расстояние $s = g\cos\alpha\frac{t^2}{2}$ (0.5 балла). Рассмотрим вертикальное падение:

$$AB = g\cos\alpha\frac{t^2}{2} \qquad \text{(0.5 балла)}$$

$$AC = \frac{gt^2}{2} \qquad \text{(0.5 балла)}$$

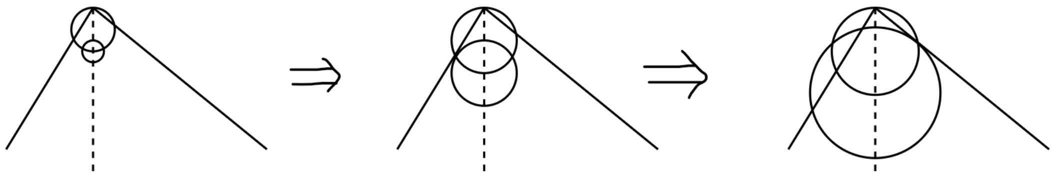
$$\angle BAC = \alpha \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Отсюда находим

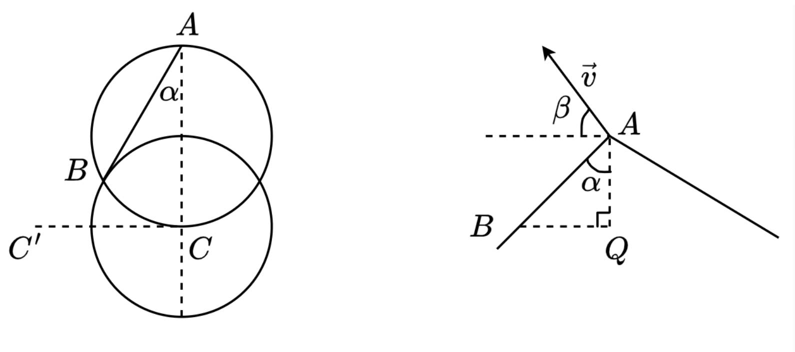
$$\angle ABC = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{(0.5 балла)}$$

что верно для любого α, следовательно AB — хорда, AC диаметр (1 балл). *Q.E.D.*

1) Так как перед взрывом снаряд полностью погасил свою скорость, то центр масс всех осколков, по закону движения центра масс, как раз таки падает с ускорением g (1 балл).
Это совпадает с нижней точкой окружности из пункта 0). В системе отсчёта центра масс осколки разлетаются равномерно во все стороны, значит образуют сферу (окружность) (1 балл):



2) Рассмотрим момент времени t_1:



Угол вылета β равен углу $\angle BCC' = \frac{\pi}{2} - \angle BCA = \angle BAC = \alpha$ (0.5 балла) (так как CB — изначальное направление вылета осколка). Тогда по теореме Пифагора в $\triangle ABQ$:

$$AB^2 = AQ^2 + BQ^2 = \left(g\cos\alpha\frac{t_1^2}{2}\right)^2$$

$$AB^2 = \left(g\cos^2\alpha\frac{t_1^2}{2}\right)^2 + (v\cos\beta t_1)^2 \qquad \text{(1 балл)}$$

Мы знаем, что $\beta = \alpha$, поэтому

$$g^2\frac{t_1^2}{4} = \frac{g^2t_1^4\cos^2\alpha}{4} + v^2t_1^2$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4v^2}{g^2t_1^2} \qquad \text{(1 балл)}$$

3) Абсолютно аналогично делаем для второго направления крыши. Если вместо α будет γ, то:

$$\begin{cases} \cos^2\gamma = 1 - \frac{4v^2}{g^2t^2} \\ \cos^2\alpha = 1 - \frac{4v^2}{g^2t^1} \end{cases} \qquad \text{(0.5 балла)}$$

4) Запишем энергию взрыва $E = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{2E}{m}$ (0.5 балла). Подставляя это в верхние уравнения, получаем:

$$\begin{cases} \cos^2\gamma = 1 - \frac{8E}{mg^2t_2^2} \\ \cos^2\alpha = 1 - \frac{8E}{mg^2t_1^2} \end{cases}$$

Складывая два уравнения системы, получаем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\gamma = 2 - \frac{8E}{mg^2}\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2}\right) \qquad \text{(0.5 балла)}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\gamma = 1 \qquad \text{(1 балл)}$$

На доступных нам диапазонах получаем: $\alpha + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$. (1 балл)

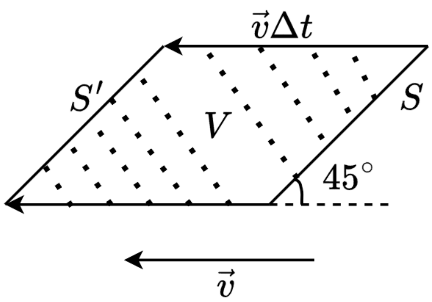
Задание 7

Автор: Горшунов Н.

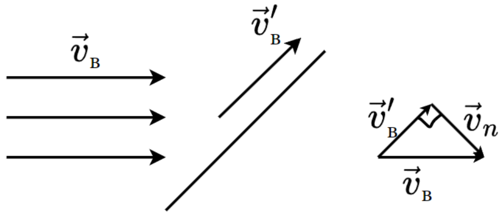
Чёткий физик Назар решил протюнинговать своё радиоуправляемое авто, чтобы то могло ездить по стенам. Для этого он установил на его крышу спойлер площадью 200 см^2, наклонив его под углом 45 градусов к горизонту (при условии, что машина стоит на полу). Чтобы его план сработал, однако, необходимо, чтобы авто развило определённую скорость, а для этого ему нужен и более мощный двигатель. Оцените, какую минимальную скорость v нужно развить авто и какая минимальная дополнительная мощность N для этого нужна двигателю, чтобы затея сработала и машина смогла ехать параллельно горизонту по вертикальной стене? Назар предположил, что масса авто с новым двигателем – 500 г. Плотность воздуха – 1,27 кг/м^3. Чтобы машина могла ехать без проскальзывания, ей необходима прижимная сила не менее $0.5mg$. Вязкостью воздуха пренебречь. Считать, что сейчас мощности двигателя хватает ровно на то, чтобы машина смогла ехать на скорости v без спойлера.

Решение

Когда машина едет по вертикальной стене параллельно горизонту, сила тяжести действует параллельно стене и никак не влияет на вес машины на стену. Единственный источник, формирующий прижимную силу к стене — это спойлер. Оценить его влияние мы можем следующим образом: пусть машина едет со скоростью v в течение времени Δt. За это время спойлер S перемещается в положение S' и захватывает воздух объёмом $V = \Delta t \cdot S_0 \sin 45°$ (1 балл), где S_0 — площадь спойлера.



Относительно машины этот воздух до соприкосновения со спойлером движется по горизонтали к нему, а после – параллельно спойлеру, меняя свой угол скорости. Точнее говоря, остаётся только проекция скорости воздуха на плоскость спойлера. А проекция, перпендикулярная ему, и создаёт прижимную силу. За рисунок — 2 балла.



То есть воздух передаёт часть импульса mv_n машине. Для объёма V эта часть импульса создаёт силу:

$$F_n = \frac{m\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{\rho_в \cdot v\Delta t S_0 \sin 45^\circ \cdot v \sin 45^\circ}{\Delta t} = \frac{\rho S_0 v^2}{2} \qquad \text{(3 балла)}$$

Эта сила, в свою очередь, имеет проекцию, прижимающую машину к поверхности $F_n \sin 45^\circ$ (1 балл), а значит:

$$F_n \sin 45^\circ = \frac{\rho S_0 v^2}{2} \sin 45^\circ \geq 0.5mg \qquad \text{(1.5 балла)}$$

$$v \geq \sqrt{mg/(\rho S_0 \sin 45^\circ)} \qquad \text{(0.5 балла)}$$

$$v \geq \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5 \cdot 10}{1.27 \cdot 0.02 \cdot 0.707}} = 11.79 \text{ м/с}^2 \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Аналогичная сила действует и против движения автомобиля (другая проекция F_n). Тогда необходимая добавочная мощность:

$$N = Fv = F_n \sin 45^\circ v = 0.5mg \sin 45^\circ v \qquad \text{(1.5 балла)}$$

$$N = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 10 \cdot 11.79 \cdot 0.707 = 20.84 \text{ Вт} \qquad \text{(0.5 балла)}$$

Наши партнёры

Ищите нас

- в интернете
- в инстаграме
- в телеграме