Almaty Physics Battles 2024

Отборочный тур

Старшая лига

12-19 мая 2024

Авторы задач: Еркебаев А., Кайроллаев Е., Бисимби Д.
Вёрстка: Еркебаев А., Кайроллаев Е.
Иллюстрации: Еркебаев А., Кайроллаев Е., Бисимби Д.

Содержание

Задачи Старшей лиги

Задача 1: Карусель *(Еркебаев А.)*

Частица начала двигаться по окружности радиусом $R = 1$ м с постоянным угловым ускорением $\beta = \pi/4$ с$^{-2}$.

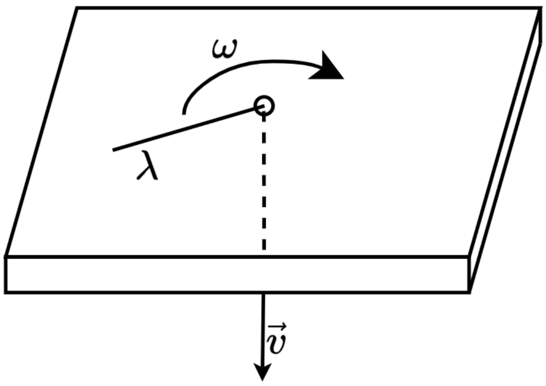
1. Через сколько секунд t_1 после начала движения частица сделает первый полный оборот?

2. После какого по счёту оборота n частица будет совершать полные обороты меньше, чем за 1 секунду?

3. Через сколько секунд t_2 после начала движения угол между вектором полного ускорения частицы и направлением её движения составит 45°? Ответ округлите до сотых.

Задача 2: Кручу-верчу *(Кайроллаев Е.)*

Невесомая нить, длиной $L = 2$ м, которая выдерживает натяжение $T = 1440$ Н продета через отверстие в столе и вращается вокруг оси с угловой скоростью $\omega = 1.5$ рад/с. К концу нити привязан груз массой $m = 5$ кг. Даниал тянет за другой конец нити так, что длина вращающейся части укорачивается со скоростью $v = 0.5$ м/с. В момент времени $t = 0$ с, длина нити с нижней стороны отверстия была равна нулю.

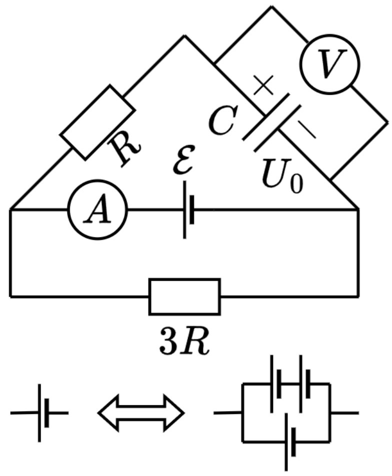


1. Найдите, во сколько раз увеличится угловая скорость через $t_1 = 2$ с.

2. Через какое время, в секундах, нить порвётся?

3. Как изменится ответ на пункт 2, если вместо нити и груза будет верёвка с линейной плотностью $\lambda = 0.5$ кг/м? Повторяем, **груза в этом пункте теперь нет.** Ответ дайте в секундах и округлите до одной цифры после запятой.

Задача 3: Старший электрик Арсен *(Еркебаев А.)*



В цепи, указанной на рисунке справа, значение единицы сопротивления $R = 100$ Ом, ёмкость конденсатора $C = 100$ мкФ, а величина ЭДС равна $\mathcal{E} = 12$ В. Измерительные приборы считайте идеальными, а внутреннее сопротивление источника напряжения гораздо меньше, чем R. Сначала конденсатор подключался к цепи, будучи заряженным на величину $U_0 = \mathcal{E}/3$. Определите,

1. Чему равна сила тока на амперметре, в амперах, сразу после подключения конденсатора к остальным элементам цепи?

2. Какой заряд Δq протечёт через ЭДС от конденсатора после его полной зарядки? Ответ дайте в милликулонах [мКл]

Старший электрик Арсен нашёл ещё два источника напряжения, точно таких же, как и тот, что находится в цепи. Для того, чтобы повысить напряжение на конденсаторах, он попробовал соединить эти два источника к третьему, но немного ошибся, и соединение источников напряжения вышло таким, как в нижней правой части рисунка.

3. Каким теперь станет новое напряжение на вольтметре, в вольтах, после полной перезарядки конденсатора в цепи?

Задача 4: С–Г–С–М *(Кайроллаев Е.)*

Наверняка, прочитав название, вы подумали, что мы сейчас будем работать с расширением именитой Гауссовой системы сантиметр-грамм-секунда для магнетизма. Однако ж, её сокращение пишется как "СГСМ", а внимательные читатели уже обратили внимание на н-тире (более точно "n-dash") между буквами в аббревиатуре, которая на самом деле расшифровывается, как "сом–гиппопотам–скорпион–магнетизм". Ниже представлены основные единицы в данной системе:

- средняя длина сома [сдс] — $l_{\mathrm{u}} = 1.4$ м;
- средняя масса гиппопотама [смг] — $m_{\mathrm{u}} = 1480$ кг;
- длина первой песни в первом альбоме группы Scorpions [дпп] — $t_{\mathrm{u}} = 292$ с;
- магнитная постоянная равна 1 (безразмерно).

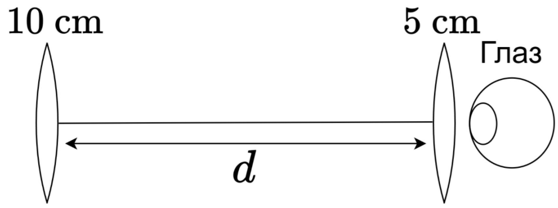
В данной задаче мы рассмотрим взаимосвязь между СИ и С–Г–С–М для некоторых физических величин. **Внимание:** записывайте числа в стандартном виде $a \cdot 10^k$, где $1 \le a < 10$, k – целое число. Во всех пунктах, с использованием правил округления, указывайте число a с точностью до **трёх** цифр после запятой; если введённый ответ будет лишь *приближённо* верным, то может быть вычтено вплоть до 50% за данный пункт.

1. Выразите массу водорода ($1.6726 \cdot 10^{-27}$ кг) через [смг];
2. Выразите ускорение свободного падения (9.81 м/с^2) в [сдс/дпп^2];
3. Выразите единицу силы Вейдер в С–Г–С через Ньютоны. Другими словами, сколько Ньютонов в одном Вейдере?

Бейонд — единица измерения силы тока в С–Г–С–М, и определяется как ток, который необходимо пустить по двум тонким параллельным бесконечным проводам на расстоянии 1 сдс друг от друга, чтобы они притягивались с силой $F = 2\pi$ вдр/сдс. Магнитная постоянная в СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн $\cdot$ м$^{-1}$.

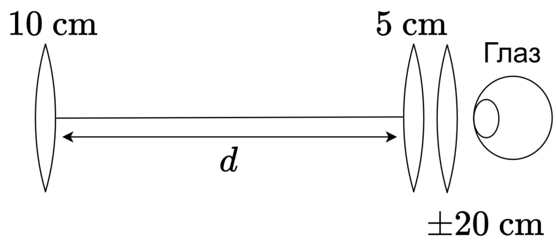
4. Найдите, сколько Ампер в одном Бейонде?

Задача 5: Телескоп *(Бисимби Д.)*



Рассмотрим простой телескоп, состоящий из двух собирающих линз с фокусными расстояниями 5 см и 10 см. На левую линзу с фокусным расстоянием 10 см падает свет от очень далёкого предмета. Прямо в правую линзу смотрит человек. Считайте, что глаз находится в упоре к правой линзе, и глаз не напряжён. Глаз напрягается, чтобы сфокусироваться на близких предметах, а когда человек смотрит на горизонт или чётко видит очень далёкий предмет, глаз не напряжён. Везде давайте ответы в сантиметрах, а округляйте до трёх значащих цифр.

1. Найдите, на каком расстоянии от левой линзы надо поставить правую линзу с фокусным расстоянием 5 см, чтобы изображение, видное в телескопе, было чётким.



Для людей с близорукостью или дальнозоркостью телескоп должен быть скорректирован, чтобы показывать чёткое изображение. Смоделируем близорукость собирающей линзой с фокусным расстоянием 20 см, которая стоит прямо перед глазом и правой линзой телескопа.

2. Найдите теперь, на каком расстоянии должна быть правая линза от левой в телескопе.

Для дальнозоркости представим, что между глазом и правой линзой телескопа стоит рассеивающая линза с фокусным расстоянием 20 см.

3. Найдите в этом случае, на каком расстоянии должна быть правая линза от левой в телескопе.

Задача 6: Цилиндр *(Бисимби Д.)*

Вокруг бесконечного полого цилиндра с равномерным положительным линейным зарядом $\gamma = e \cdot 10^4$ м$^{-1}$ движется электрон по круговой орбите. Элементарный заряд $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Радиус цилиндра $R_0 = 1$ мкм.

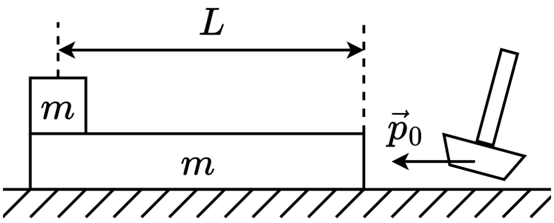
1. Найдите напряженность электрического поля на расстоянии $R_1 = 100$ мкм от оси цилиндра.

2. Найдите скорость электрона в м/с.

3. Какой минимальный радиус орбиты электрона в мкм?

4. Частицу с каким максимальным зарядом $q \geq 0$ можно переместить с бесконечности до расстояния R_1 от оси цилиндра? Для ответа укажите, во сколько раз q больше чем e.

Задача 7: По голове себе постучи *(Еркебаев А.)*



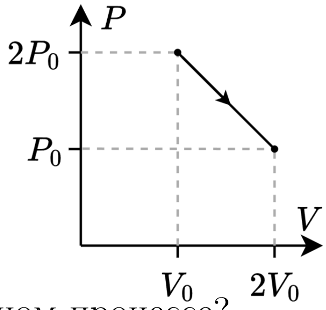
Маленький грузик массы $m = 1$ кг положили на краю доски такой же массы $m = 1$ кг и длины $L = 15$ см. С другого края доску периодически подбивают молотком, сообщая импульс $p_0 = 0.8$ Н · с и ожидая, пока система не придёт в равновесие. Коэффициенты трения между доской и столом, а также между грузиком и доской одинаковы и равны $\mu = 0.4$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответьте,

1. Чему равны скорости доски v_1 и грузика v_2 сразу после одного удара?

2. Какова будет скорость доски v, когда проскальзывание между ней и грузиком прекратится в течение движения после одного удара?

3. Сколько ударов n потребуется, чтобы грузик соскользнул с доски?

Задача 8: Линейный процесс *(Еркебаев А.)*



На рисунке указана PV-диаграмма процесса над 1 молем идеального одноатомного газа, давление которого падает линейно с объёмом. Известно, что $P_0V_0 = 2500$ Дж, где P_0 и V_0 – единицы давления и объёма, указанные на рисунке. Газовая постоянная $R = 8.31$ Дж/(моль · К). Ответьте,

1. Какую суммарную теплоту Q в [Дж] получил газ в данном процессе?

2. Чему равна теплоёмкость газа C в самом начале процесса? В качестве ответа укажите, во сколько раз это значение больше R, то есть укажите численное значение некоторого множителя α из соотношения $C = \alpha R$.

3. Какова максимальная температура газа T в этом процессе? Ответ дайте в кельвинах [К], округлив до целого.

Задача 9: Соленоид-аккордеон *(Еркебаев А.)*

Через накоротко замкнутый сверхпроводящий длинный соленоид площадью поперечного сечения $S = 4$ см^2, длины $l = 1$ м и количеством витков на единицу длины $n = 500$ м$^{-1}$ протекает электрический ток $I_0 = 1$ А. В данной задаче краевые эффекты не учитывать; магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

1. Каково значение магнитного поля B_0 внутри соленоида? Ответ дайте в миллитеслах [мТл], с точностью до трёх цифр после запятой.

2. Какую работу A нужно совершить, чтобы медленно растянуть соленоид вдоль его длины в два раза? Ответ дайте в микроджоулях [мкДж] с точностью до одной цифры после запятой.

3. Соленоид вернули в исходное состояние, а затем резко ввели ферромагнитный сердечник площадью $S/2$ с магнитной проницаемостью $\mu = 1000$ (тогда для простоты вполне справедливо считать, что $\mu \gg 1$). Определите новое значение электрического тока I в установившемся состоянии. Ответ дайте в миллиамперах [мА] и округлите до целого.

Задача 10: Призрачные пробки *(Бисимби Д.)*

Очередная олимпиада по русскому языку – и однажды в городе Алматы, школьник Илияс снова опаздывал на неё. Чтобы добраться быстрее, он решил перебежать дорогу в неположенном месте. На него двигался ряд машин, с постоянной скоростью $V = 15$ м/с, расстояние между которыми было $d = 8$ м. Был дождливый день, коэффициент трения шин об асфальт $\mu = 0.2$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Первый водитель увидел Илияса и начал тормозить, однако понял, что Илияс выбрал оптимальный путь через дорогу и что опасности нет. Поэтому водитель тормозил всего лишь 1 секунду, а затем продолжил ехать дальше с постоянной скоростью. Второй водитель тоже начал снижать скорость как только отреагировал на торможение первого, пока не сравнялся с ним по скорости и не продолжил ехать дальше – как оказалось, с немного меньшей скоростью, чем первый водитель. Так же поступил и третий водитель, и четвёртый, и так далее. Таким образом, целый ряд машин притормозил – получилась призрачная пробка только потому, что первый водитель незначительно снизил скорость.

Из-за времени реакции людей, каждый водитель реагирует на торможение машины перед ним только через 0.5 секунд. Также водитель перестаёт тормозить только через 0.5 секунд после того, как его скорость сравнялась со скоростью передней машины. Считайте, что после торможения скорость машин не меняется.

1. Найти, какая машина в ряде в итоге действий Илияса полностью остановится. Счёт машин начинается с первой, которая начала тормозить; считайте, что никакие машины не столкнулись.

2. Найдите расстояние между машинами 5 и 6 сразу после того, как обе машины перестанут тормозить.

3. Какое минимальное расстояние $d_{\min}$ должно быть между машинами, чтобы ни одна из них не столкнулась с другой?

Решения задач Старшей лиги

Задача 1: Карусель *(Еркебаев А.)*

1. По известной кинематической формуле угол поворота φ частицы зависит от времени как

$$\varphi = \frac{\beta t^2}{2}. \tag{1.1}$$

Имея, что $\varphi = 2\pi$, получаем

$$t_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{\beta}} = 4 \text{ с}. \tag{1.2}$$

2. После n оборотов угловая скорость частицы станет равной

$$\omega_0 = \beta \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2\pi n}{\beta}} = 2\sqrt{\beta\pi n} = \pi\sqrt{n} \text{ с}^{-1}. \tag{1.3}$$

Поэтому время между n и $n+1$ оборотом будет вычисляться из выражения

$$2\pi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} = \pi t\sqrt{n} + \frac{\pi t^2}{8}. \tag{1.4}$$

Получаем, что

$$n = \frac{(2 - t^2/8)^2}{t^2}. \tag{1.5}$$

Подставляя $t = 1$ с, видим, что после $n = 3$ время оборота будет всегда меньше этой величины.

3. Полное ускорение частицы складывается из векторной суммы тангенциального $a_\tau = \beta R$ и центростремительного $a_n = \omega^2 R = \beta^2 t^2 R$ ускорений. Поворот вектора на 45° относительно $\vec{a}_\tau$ соответствует равенству этих компонентов по модулю. Итак,

$$\beta R = \beta^2 t_2^2 R \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \approx 1.13 \text{ с}. \tag{1.6}$$

Содержание	Баллы
$t_1 = 4$ с	3
$n = 3$	4
$t_2 = 1.13$ с	3

Задача 2: Кручу-верчу *(Кайроллаев Е.)*

1. Через какое-то время τ, длина вращающейся части верёвки станет $L - v\tau$. Так как все силы в данной системе радиальны, мы можем записать закон сохранения момента импульса относительно отверстия для начального момента времени и через время t_1:

$$mL^2\omega_0 = m(L - vt_1)^2\omega. \tag{2.1}$$

Из этого уравнения, находим отношение угловых скоростей:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L^2}{(L - vt_1)^2} = 4, \tag{2.2}$$

то есть угловая скорость увеличится в 4 раза.

2. Единственная горизонтальная сила, действующая на грузик — сила натяжения. Тогда, записывая второй закон Ньютона для момента времени t_2, получаем:

$$T = m\omega_2^2(L - vt_2). \tag{2.3}$$

Подставляя в это уравнение ω_2, как угловую скорость в момент времени t_2, и решая его для времени, находим:

$$t = \frac{1}{v}\left(L - \sqrt[3]{\frac{mL^4\omega_0^2}{T}}\right) = 3\ \text{с}. \tag{2.4}$$

3. Для верёвки массы $m = \lambda L$ момент инерции относительно её конца равен

$$I = \frac{mL^2}{3} = \frac{\lambda L^3}{3}. \tag{2.5}$$

Используя это, запишем закон сохранения момента импульса для верёвки:

$$\frac{1}{3}\lambda L^3\omega_0 = \frac{1}{3}\lambda(L - vt_3)^3\omega_3 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \frac{L^3\omega_0^2}{(L - vt_3)^3}. \tag{2.6}$$

Очевидно, что максимальная сила натяжения верёвки находится в месте её перегиба. Тогда по теореме о движении центра масс:

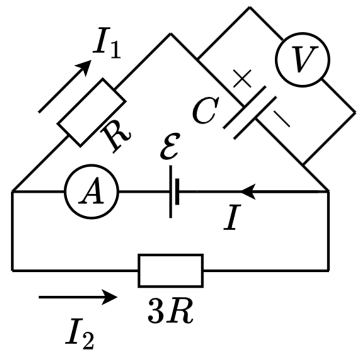
$$T = \frac{1}{2}\lambda L^2\omega_3^2. \tag{2.7}$$

Подставляя угловую скорость и решая это уравнение для времени, получаем:

$$t_3 = \frac{1}{v}\left(L - \sqrt[4]{\frac{\lambda L^6\omega_0^2}{2T}}\right) \approx 3.2\ \text{с}. \tag{2.8}$$

Содержание	**Баллы**
$\omega/\omega_0 = 4$	3
$t = 3$ с	3
$t = 3.2$ с	4

Задача 3: Старший электрик Арсен *(Еркебаев А.)*



1. Рассмотрев данную цепь, можно записать, что $I_1 + I_2 = I$, а также два уравнения второго закона Кирхгофа, которые соответствуют верхнему и нижнему обходам контура соответственно:

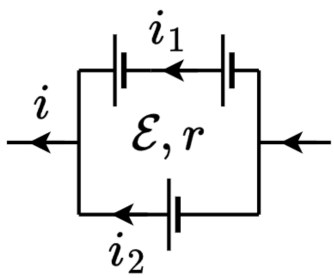
$$\mathcal{E} = I_1 R + \mathcal{E}/3, \quad \mathcal{E} = 3I_2 R. \tag{3.1}$$

Отсюда определяем силу тока на амперметре:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 0.12 \text{ А}. \tag{3.2}$$

2. В начале напряжение на конденсаторе было равно $\mathcal{E}/3$ – в конце же он должен быть равным внешнему ЭДС $\mathcal{E}$, поскольку при полной зарядке ток $I_1 = 0$. Отсюда следует, что изменение заряда на конденсаторе (которое преимущественно протекает через ЭДС) равно

$$\Delta q = C\left(\mathcal{E} - \mathcal{E}/3\right) = 0.8 \text{ мкКл}. \tag{3.3}$$



3. Теперь рассмотрим структуру самой системы источников. В таких масштабах уже нельзя пренебрегать внутренними сопротивлениями эдс. Задача этого пункта состоит в том, чтобы подобрать эквивалентные значения ЭДС $\mathcal{E}^*$ и (опционально) внутреннего сопротивления r^*, который бы имел эквивалентный источник. Иначе говоря, взять за основу формулу

$$U = \mathcal{E}^* - ir^*, \tag{3.4}$$

и привести суммарное действие троих ЭДС к такого вида зависимости. Итак, обход по контуру и падение напряжения на нём справа налево даёт формулы

$$2\mathcal{E} - \mathcal{E} = 2i_1 r - i_2 r, \quad U = \mathcal{E} - i_2 r, \tag{3.5}$$

результатом решения которых будет

$$i_2 = \frac{2}{3}i - \frac{\mathcal{E}}{3r}, \quad \Rightarrow \quad U = \frac{4\mathcal{E}}{3} - \frac{2}{3}ir. \tag{3.6}$$

Получаем, что

$$\mathcal{E}^* = \frac{4}{3}\mathcal{E}, \quad r^* = \frac{2}{3}r. \tag{3.7}$$

Поскольку $r \ll R$, второе нас не интересует – но теперь мы знаем, что общий ЭДС увеличивается в 4/3 раза (хотя Арсен мог бы увеличить его втрое, и не давать вредных советов младшему электрику Альтаиру!), а значит новое показание на вольтметре будет

$$V_{\text{new}} = \frac{4}{3} \cdot 12 \text{ В} = 16 \text{ В}. \tag{3.8}$$

Содержание	**Баллы**
$I = 0.12$ А	2
$\Delta q = 0.8$ мкКл	2
$V_{\text{new}} = 16$ В	6

Задача 4: С–Г–С–М *(Кайроллаев Е.)*

Для начала выразим единицы измерения в СИ через единицы измерения в С–Г–С:

- $[\text{м}] = \frac{5}{7}$ $[\text{сдс}] \approx 0.714$ $[\text{сдс}]$;
- $[\text{кг}] = \frac{1}{1480}$ $[\text{смг}] \approx 6.757 \cdot 10^{-4}$ $[\text{смг}]$;
- $[\text{с}] = \frac{1}{292}$ $[\text{дпп}] \approx 3.4 \cdot 10^{-3}$ $[\text{дпп}]$

Используя эти данные, можно приступать к решению пунктов.
1. Найдём массу протона:

$$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1.6726 \cdot 10^{-27} \cdot \frac{1}{1480} \text{ смг} = 1.130 \cdot 10^{-30} \text{ смг}. \tag{4.1}$$

2. Аналогично первому пункту, ускорение свободного падения:

$$\begin{aligned} g = 9.81 \text{ м/с}^2 = 9.81 \cdot \frac{5}{7} \text{ сдс} \cdot 292^2 \text{ с}^{-2} = \\ = 597457.0286 \text{ сдс/дпп}^2 = 5.975 \cdot 10^5 \text{ сдс/дпп}^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

3. Для нахождения количества Ньютон в одном Вейдере, используем сопоставления из условия:

$$1 \text{ вдр} = 1 \text{ сдм} \cdot \text{сдс/дпп}^2 = 1480 \text{ кг} \cdot 1.4 \text{ м} \;/\; \left(292^2 \text{ с}^2\right) = 2.430 \cdot 10^{-2} \text{ Н}. \tag{4.3}$$

4. В решении будут использоваться обозначения:

- μ — для магнитной постоянной без привязки к системе единиц;
- μ_0 — для магнитной постоянной в СИ;
- μ_1 — для магнитной постоянной в системе С–Г–С–М.

Тонкий бесконечный провод на расстоянии R создаёт магнитное поле, равное

$$B = \frac{\mu I}{2\pi R}. \tag{4.4}$$

Притяжение с силой 1 Вдр/сдс означает, что на каждый 1 сдс провода действует сила:

$$F = IBl_u = \frac{\mu I^2 l_u}{2\pi R} \tag{4.5}$$

на единицу длины. Выразим силу тока из уравнения:

$$I = \sqrt{\frac{2\pi RF}{\mu l_u}}. \tag{4.6}$$

Теперь, найдём соотношение между магнитной постоянной в СИ и в С–Г–С–М:

$$\mu_1 = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн} \cdot \text{м}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}. \tag{4.7}$$

Используя это, найдём соотношение между 1 Бейондом и Амперами:

$$1\ \text{Бд} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 1\ \text{сдс} \cdot 2\pi\ \text{вдр/сдс}}{\mu_1 \cdot 1\ \text{сдс}}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 2\pi \cdot 2.430 \cdot 10^{-2}\ \text{Н}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}}} = 8.737 \cdot 10^2\ \text{А}. \tag{4.8}$$

Задача сопоставить единицы измерений имеет большую научно-техническую важность, поэтому приблизительные расчёты тут недопустимы. Поэтому была введена система штрафных коэффициентов (работает только в этой задаче) за вычисления с погрешностями:

- $k = 1$, если ответ совпадает с точностью до 3 знаков после запятой;
- $k = 0.8$, если ответ совпадает с точностью до 2 знаков после запятой;
- $k = 0.5$, если ответ совпадает с точностью до 1 знака после запятой;
- $k = 0.1$, если ответ совпадает с относительной погрешностью в 2%.

Содержание	Баллы
$m_p = 1.130 \cdot 10^{-30}$ смг	2
$g = 5.975 \cdot 10^5$ сдс/дпп^2 или $g = 5.974 \cdot 10^5$ сдс/дпп^2	2
1 вдр $= 2.430 \cdot 10^{-2}$ Н	2
1 Бд $= 8.737 \cdot 10^2$ А	4

Задача 5: Телескоп *(Бисимби Д.)*

1. Так как глаз не напряжён при фокусировке на дальние объекты, лучи должны быть параллельными когда доходят до глаза чтобы создать чёткое изображение. Телескоп снимает как раз дальние объекты, и лучи от них уже параллельные. После выхода из телескопа эти лучи должны быть всё ещё параллельны.
Рассмотрим изображения дальних предметов от левой линзы телескопа. Эти изображения будут на фокусе. Чтобы лучи были параллельными при выходе из телескопа фокус правой линзы должен быть на месте где изображение от левой линзы. Так:

$$d = 10 + 5 = 15 \text{ см} \tag{5.1}$$

2. Когда линзы стоят в упор, их оптические силы суммируются:

$$D_1 = \frac{1}{F_1}, \tag{5.2}$$

$$D = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{F}, \tag{5.3}$$

$$F = 4 \text{ см}. \tag{5.4}$$

Тогда две собирающие линзы можно заменить на одну линзу с фокусным расстоянием 4 cm.

$$d = 10 + 4 = 14 \text{ см}. \tag{5.5}$$

3. Точно такие же рассуждения как и в прошлых пунктах, только фокусное расстояние рассеивающей линзы отрицательное:

$$D = \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{1}{F} \tag{5.6}$$

$$F = \frac{20}{3} \text{ см} \approx 6.67 \text{ см}. \tag{5.7}$$

Дальше находим d:

$$d = 10 + 6.67 = 16.7 \text{ см}. \tag{5.8}$$

Содержание	**Баллы**
$d = 15$ см	3
$d = 14$ см	3
$d = 16.7$ см	4

Задача 6: Цилиндр *(Бисимби Д.)*

1. Воспользуемся теоремой Гаусса. Поверхностью для теоремы будет длинный цилиндр с радиусом r и длиной l. Поток через него $\Phi = 2\pi r l E$. Теорема Гаусса:

$$2\pi r l E = \frac{\gamma l}{\varepsilon_0}, \tag{6.1}$$

$$E = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{6.2}$$

Ответ:

$$E = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 R_1} = 0.288 \text{ В/м}. \tag{6.3}$$

2. Центростремительное ускорение задаётся электрической силой:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\gamma e}{2\pi\varepsilon_0 r}, \tag{6.4}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma e}{2\pi\varepsilon_0 m_e}} \approx 2250 \text{ м/с}. \tag{6.5}$$

3. В уравнении (6.4) радиус орбиты электрона сокращается. Это значит что он может двигаться по круговой орбите на любом расстоянии где поле как в уравнении **(1)**. Внутри цилиндра поля не будет, значит радиус орбит электрона ограничен только радиусом цилиндра. Ответ: $R_0 = 1$ мкм.

4. Надо заметить, что интеграл для работы электрического поля

$$A = -\int_{\infty}^{R_1} \frac{\gamma q}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot dr \tag{6.6}$$

уходит в бесконечность. Такого не происходит только когда заряд частицы нулевой. Ответ: $q = 0$.

Содержание	Баллы
$E = 0.288$ В/м	2
$v = 2250$ м/с	3
$R_0 = 1$ мкм	2
$q = 0$	2

Задача 7: По голове себе постучи *(Еркебаев А.)*

1. Сразу после удара, доска приобретёт импульс p_0 от молотка, и, соответственно с этим, скорость

$$v_1 = p_0/m = 0.8 \text{ м/с}. \tag{7.1}$$

Грузик же за такое незначительное время удара не успеет сдвинуться, так что $v_2 = 0$.

2. Когда проскальзывание между доской и грузиком прекращается, $v_1 = v_2 = v$. Скорости доски и грузика меняются из-за наличия сил трения, причём доска испытывает трение

$$f_1 = \mu(N_1 + N_2) = \mu(mg + 2mg) = 3\mu mg, \tag{7.2}$$

где $N_1 = mg$ и $N_2 = 2mg$ – силы нормальной реакции между доской и грузом, и доской и столом соответственно. Трение, действующее на груз, ускоряет его с силой

$$f_2 = \mu N_1 = \mu mg. \tag{7.3}$$

Теперь же, имея систему уравнений

$$\begin{cases} v = v_1 - \dfrac{f_1}{m} \cdot \tau; \\ v = \dfrac{f_2}{m} \cdot \tau, \end{cases} \tag{7.4}$$

получаем время скольжения

$$\tau = \frac{mv_1}{f_1 + f_2} = \frac{v_1}{4\mu g}, \tag{7.5}$$

и, подставляя его в одно из двух уравнений выше, находим

$$v = v_1 \cdot \frac{f_2}{f_1 + f_2} = \frac{1}{4} v_1 = 0.2 \text{ м/с}. \tag{7.6}$$

3. Сперва определим, на какое расстояние смещается грузик относительно доски после одного удара. Сам груз движется (согласно рисунку из условия) влево, преодолевая расстояние

$$s_2 = \frac{f_2 \cdot \tau^2}{2m} = \frac{v_1^2}{32\mu g}. \tag{7.7}$$

Доска же проходит расстояние

$$s_1 = v_1\tau - \frac{f_1 \cdot \tau^2}{2m} = \frac{5v_1^2}{32\mu g} \tag{7.8}$$

Дальнейшее торможение системы нас не интересует, поскольку относительное движение заканчивается. Получаем, что смещение за один удар равно

$$s = s_1 - s_2 = \frac{v_1^2}{8\mu g} = 2 \text{ см}, \tag{7.9}$$

и, учитывая, что $L = 15$ см, получаем, что за

$$n = 8 \tag{7.10}$$

ударов грузик соскользнёт с доски.

Содержание	Баллы
$v_1 = 0.8$ м/с	1
$v_2 = 0$ м/с	1
$v = 0.2$ м/с	4
$n = 8$	4

Задача 8: Линейный процесс *(Еркебаев А.)*

1. Известно, что

$$Q = A + \Delta U, \tag{8.1}$$

где A – работа газа, численно равная площади под графиком,

$$A = \frac{3}{2}P_0V_0, \tag{8.2}$$

а $\Delta U = C_V\Delta T$ – изменение внутренней энергии газа. Поскольку из соотношения Менделеева-Клапейрона $PV = RT$ следует, что температуры газа в начале и конце процесса равны, то и $\Delta U = 0$. Итак, получаем

$$Q = A = 1.5 \cdot 2500 \text{ Дж} = 3750 \text{ Дж}. \tag{8.3}$$

2. Распишем первое начало термодинамики в дифференциальном виде, определяя теплоёмкость газа через соотношение $\delta Q = CdT$:

$$CdT = C_VdT + PdV. \tag{8.4}$$

Для 1 моля идеального одноатомного газа теплоёмкость при постоянном объёме равна $C_V = 3R/2$, а $RdT = PdV + VdP$. Соотношение выше приводится к

$$C = \frac{3R}{2} + R \cdot \left(1 + \frac{V}{P} \cdot \frac{dP}{dV}\right)^{-1}. \tag{8.5}$$

Имея, что $dP/dV = -P_0/V_0$ из наклона графика, и подставляя $V = V_0$ и $P = 2P_0$, получаем

$$C = \frac{3R}{2} + 2R = 3.5R. \tag{8.6}$$

3. Аналитически зависимость давления от объёма равна

$$P(V) = P_0 \cdot \left(3 - \frac{V}{V_0}\right). \tag{8.7}$$

Подставляя в соотношение $PV = RT$, найдём зависимость температуры от объёма:

$$T(V) = \frac{P_0 V}{R} \cdot \left(3 - \frac{V}{V_0}\right). \tag{8.8}$$

Либо находим экстремум функции $dT(V)/dV = 0$, либо замечаем, что данная зависимость квадратична, а значит равенство нулю дискриминанта соответствует максимуму температуры. Третьим способом может быть то, что при максимуме температуры газ локально проходит через очень малую изотерму, так как в этом процессе дальнейшего приращения температуры не может быть; следовательно, теплоёмкость $C = \infty$ и определяется уравнением из второго пункта задачи. Во всяком случае, объём, соответствующий максимуму температуры, равен

$$V_1 = 1.5V_0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = 1.5P_0, \tag{8.9}$$

а значит

$$T_{\max} = \frac{P_1 V_1}{R} = 2.25 \cdot \frac{P_0 V_0}{R} = 677 \text{ K}. \tag{8.10}$$

Содержание	**Баллы**
$Q = 3750$ Дж	3
$C = 7R/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3.5$	4
$T_{\max} = 677$ К	3

Задача 9: Соленоид-аккордеон *(Еркебаев А.)*

1. Всего соленоид имеет $N = nl$ витков. В соответствие с известной теоремой о циркуляции $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$, натянем прямоугольный контур длины l так, чтобы два его ребра были параллельны оси соленоида, а другие два – перпендикулярны ему, причём сам контур охватит N витков. Если одно ребро будет находиться внутри соленоида, то интеграл по контуру даст $B_0 l$ на его отрезке; тогда второе ребро, находящееся снаружи соленоида, не будет вносить вклада в циркуляцию из-за равенства нулю магнитного поля вне соленоида. Итого получаем

$$B_0 l = N \cdot \mu_0 I_0 \quad \Rightarrow \quad B_0 = \mu_0 n I_0 = 0.628 \text{ мТл}. \tag{9.1}$$

2. Рассчитаем индуктивность нашего соленоида, которая равна общему потокосцеплению $\Psi_0 = N \cdot B_0 \cdot \pi r^2$ на единицу силы тока:

$$L_0 = \Psi_0 / I_0 = \mu_0 n^2 S l. \tag{9.2}$$

Тогда соленоид имеет энергию $W = L_0 I_0^2/2 = \Psi_0^2/2L_0$. При растяжении в два раза количество витков на единицу длины соленоида соответственно уменьшится вдвое, поэтому новая индуктивность соленоида $L \propto n^2 l = L_0/2$. Так как магнитный поток Ψ_0 сохраняется, получаем работу, равную изменению магнитной энергии соленоида

$$A = \frac{\Psi_0^2}{2L} - \frac{\Psi_0^2}{2L_0} = \frac{L_0 I_0^2}{2} = \frac{1}{2}\mu_0 I_0^2 n^2 S l = 62.8 \text{ мкДж}. \tag{9.3}$$

3. В области, где находится сердечник, магнитное поле усиливается в μ раз. При силе тока I магнитный поток через соленоид будет равен

$$\Psi \approx N \cdot \mu B \cdot S/2 = \Psi_0 \frac{I}{I_0} \cdot \frac{\mu}{2}. \tag{9.4}$$

В данном случае поток тоже должен сохраняться, т.е. $\Psi = \Psi_0$. Отсюда получаем

$$I = I_0 \cdot \frac{2}{\mu} = 2 \text{ мА}. \tag{9.5}$$

Содержание	**Баллы**
$B_0 = 0.628$ мТл	2
$A = 62.8$ мкДж	4
$I = 2$ мА	4

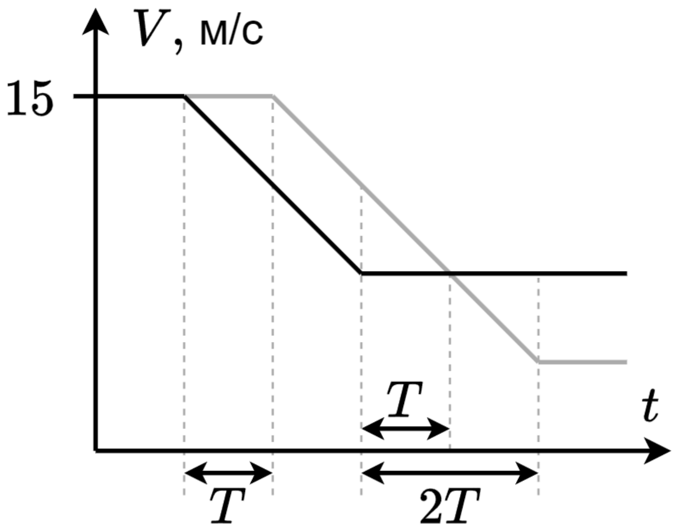
Задача 10: Призрачные пробки *(Бисимби Д.)*

1. Машины тормозят за счёт силы трения, поэтому их ускорение:

$$a = \frac{F}{m}, \quad F = \mu N = \mu mg \quad \Rightarrow \quad a = \mu g = 2 \text{ м/с}. \tag{10.1}$$

Каждый водитель тормозит на 0.5 секунд дольше, чем водитель перед ним. Поэтому скорость после торможения уменьшается на 1 м/с для каждой последующей машины в ряду. У первой машины после торможения будет скорость 13 м/с, у второй 12 м/с, у третьей 11 м/с и так далее. У машины номер $N = 14$ и у всех после неё конечная скорость будет 0.

2. Чтобы лучше понять как меняются скорости машин во времени, хорошо будет построить график скорости от времени для двух смежных машин. Для первой и второй машин:



Все отрезки времени T на графике одинаковые и равны 0,5 секунд по условиям задачи. Мы рассматриваем часть графика, где скорости машин меняются. Из графика видно, что первая машина будет тормозить от начальной скорости до своей конечной, и двигаться с конечной скоростью 1 секунду. А вторая машина сначала едет с начальной скоростью 0,5 секунд, и дальше тормозит до конечной скорости. Мы будем отмечать конечные скорости машин символом V_n, где n – это номер машины. Тогда расстояния, пройденные машинами:

$$d_n = \frac{V^2 - V_n^2}{2a} + V_n \cdot 2T, \quad d_{n+1} = V \cdot T + \frac{V^2 - V_{n+1}^2}{2a}. \tag{10.2}$$

Изменение расстояния между машинами, учитывая, что $V_n = V_{n+1} + 1$:

$$\Delta d = d_n - d_{n+1}, \quad \Delta d = -V \cdot T - \frac{V_n^2 - V_{n+1}^2}{2 \cdot a} + V_n \cdot 2T, \tag{10.3}$$

$$\Delta d = \frac{2V_n - 29}{4}. \tag{10.4}$$

Это формула для изменения расстояния между машинами n и $n+1$
Отсюда ответ на Пункт 2:

$$d_5 = 8 + \frac{2 \cdot 9 - 29}{4} = 5.25 \text{ м}. \tag{10.5}$$

3. Чтобы ответить на вопрос, указанный в третьем пункте, надо найти максимальное уменьшение расстояния между машинами.
На графике из второго пункта, на этот раз мы рассматриваем отрезок времени, где расстояние между машинами уменьшается, то есть от начального момента до момента, когда скорости машин сравняются.
Учитывая это:

$$d_n = \frac{V^2 - V_n^2}{2a} + V_n \cdot T, \quad d_{n+1} = V \cdot T + \frac{V^2 - V_n^2}{2a}. \tag{10.6}$$

А изменение расстояния:

$$\Delta d = d_n - d_{n+1}, \quad \Delta d = (V_n - V)T. \tag{10.7}$$

Подставляя значения:

$$\Delta d = \frac{V_n - 15}{2}. \tag{10.8}$$

Из уравнения (10.8) понятно что максимальное изменение расстояния будет при минимальном $V_n = 0$:

$$\Delta d = \frac{0 - 15}{2} = 7.5 \text{ м}. \tag{10.9}$$

Тогда минимальное расстояние между машинами должно быть 7.5 метров

Содержание	**Баллы**
$N = 14$	3
$d_5 = 5.25$ м	4
$\Delta d = 7.5$ м	3